

OBSAH:

1. Číselné množiny	7
2. Algebraické výrazy	11
3. Rovnice a nerovnice	17
4. Funkce	25
5. Posloupnosti	32
6. Planimetrie	35
7. Stereometrie	41
8. Analytická geometrie	47
9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	53
Řešení otevřených úloh	57
Provázanost Sbírky úloh s Katalogem	111

1 ČÍSELNÉ MNOŽINY

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 1

1.1*

Číslice na místě jednotek čísla $1^{2001} \cdot 2^{2001} \cdot 3^{2001} \cdot 4^{2001} \cdot 5^{2001}$ je:

A/ 0 B/ 2 C/ 4 D/ 6 E/ 8

Úloha 2

1.3

Cena výrobku má být upravena jedním z těchto způsobů:

1) Nejprve má být zvýšena o 10 % a potom snížena o 10 % zvýšené ceny.

2) Nejprve má být snížena o 10 % a potom zvýšena o 10 % snížené ceny.

Který z obou způsobů je pro zákazníka výhodnější?

A/ Výhodnější je úprava 1), cena bude snížena o 1,5 %.

B/ Výhodnější je úprava 2), cena bude snížena o 2 %.

C/ Obě úpravy jsou stejně výhodné, cena bude snížena o 1 %.

D/ Obě úpravy jsou stejně nevýhodné, cena bude zvýšena o 1 %.

Úloha 3

1.5

Je dáno komplexní číslo $z = -1 + i$. Argument čísla z^{11} je:

A/ $\frac{1}{4}\pi$ B/ $\frac{1}{2}\pi$ C/ $\frac{3}{4}\pi$ D/ $\frac{5}{4}\pi$ E/ $\frac{7}{4}\pi$

Úloha 4

1.5

Jsou dána komplexní čísla $a = 7 + 5i$, $b = -2 - 3i$. Výraz $|a + b|^2 + |a - b|^2$ má hodnotu:

A/ 174 B/ $5 + 2i$ C/ $2i$ D/ 75 E/ $2 + i\sqrt{2}$

Úloha 5

1.1

Vzestupné uspořádání čísel 2^{800} , 3^{600} , 5^{400} , 6^{200} je:

A/ $6^{200} < 2^{800} < 5^{400} < 3^{600}$ B/ $2^{800} < 6^{200} < 3^{600} < 5^{400}$

C/ $5^{400} < 3^{600} < 6^{200} < 2^{800}$ D/ $3^{600} < 5^{400} < 2^{800} < 6^{200}$

Úloha 6

1.4

Číslo $\frac{(10^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{2}})^{-3}}{(25^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}})^{-2}} : \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{8}}$ je rovno:

A/ $2^{\frac{9}{2}}$ B/ $5 \cdot 2^{\frac{13}{4}}$ C/ $2^{\frac{15}{3}}$ D/ $5 \cdot 2^{\frac{7}{4}}$ E/ $2^{\frac{15}{4}}$

* označení uváděná nad úlohami odpovídají jejich zařazení k příslušné cílové kompetenci a tematickému okruhu dle Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004. Bližší informace naleznete v kapitole Provázanost Sbírky úloh s katalogem na str. 111.

Řešení: 1A, 2C, 3A, 4A, 5A, 6E

Úloha 7

1.4

Číslo $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ je rovno:

A/ $5 + 2\sqrt{6}$

B/ 1

C/ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

D/ 7

E/ $5 + 4\sqrt{6}$

Úloha 8

1.1

Nejmenší společný násobek čísel 18, 20, 24 a m je 720. Nejmenší číslo m splňující tuto podmínku je:

A/ 16

B/ 45

C/ 60

D/ 72

E/ 120

Úloha 9

1.5

Číslo $\bar{z}$ komplexně sdružené k číslu

$$z = (3 + i) \cdot (-1 + i) - \frac{5i - 15}{1 + 2i} - \frac{1 - 3i}{i}$$

je rovno:

A/ $-4i$

B/ $4i$

C/ $-1 + i$

D/ $-1 - i$

E/ $1 - i$

Úloha 10

1.1

Nechť m, n jsou libovolná přirozená čísla, jejichž součet je liché číslo. Potom je liché také číslo:

A/ $m - n$

B/ $2n + m$

C/ mn

D/ $(m - 1)^n$

E/ m^{2n}

Úloha 11

1.3

Ve výsledku násobení

$$82\,482,482\,4 \cdot 37\,537,537\,5 = 309618927618309$$

nebyla vytištěna desetinná čárka. Patří mezi číslice:

A/ 8 a 9

B/ 9 a 2

C/ 2 a 7

D/ 7 a 6

E/ 6 a 1

Otevřené úlohy

Úloha 12

1.1

Ve výsledku násobení

$$333\,333\,333 \cdot 123\,456\,789 = 41\,152\,26*958\,847\,73*$$

jsou dvě číslice nahrazeny hvězdičkami. Kterou číslici nahrazuje první hvězdička zleva?

Úloha 13**1.1****ŘEŠENÍ**

- a) Dokažte, že součin libovolných dvou po sobě jdoucích sudých čísel je dělitelný osmi.
- b) Dokažte, že součin libovolných tří po sobě jdoucích sudých čísel je dělitelný čtyřiceti osmi.

str. 57

Úloha 14**1.3**

Čerpací stanice zdražila 1 l nafty v druhé polovině roku 2000 o 10 %. V lednu roku 2001 zlevnila 1 l nafty o 8 %.

- a) Zjistěte, zda byl 1 l nafty po 8% zlevnění dražší, nebo levnější než před 10% zdražením. O kolik procent?
- b) Vypočtete rozdíl cen po 10% zdražení a po následném 8% zlevnění, víte-li, že původní cena byla 25 Kč za 1 l nafty.
- c) O kolik procent by bylo třeba cenu 1 l nafty po 8% zlevnění ještě snížit, aby klesla na hodnotu před 10% zdražením?

str. 57

Úloha 15**1.1**

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $n^3 + 5n$ dělitelné šesti.

str. 58

Úloha 16**1.5**

Jsou dána čísla $t = 3 - 4i$, $u = 5i$.

- a) Sestavte normovanou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejímž jedním kořenem je číslo t .
- b) Určete goniometrický tvar komplexního čísla u .
- c) Rozhodněte, zda číslo $p = \frac{u}{t}$ je komplexní jednotka.

str. 58

Úloha 17**1.5**

Je dáno komplexní číslo $z = -1 - \sqrt{3}i$.

- a) Převedte číslo z do goniometrického tvaru.
- b) Vypočtete z^3 jednak pomocí binomické věty z daného algebraického tvaru čísla z , jednak pomocí Moivreovy věty z goniometrického tvaru čísla z .
- c) Nechť A je obraz čísla z a B obraz čísla z^3 v Gaussově rovině Oxy . Vypočtete obsah trojúhelníku ABO .
- d) Určete komplexní číslo, jehož obrazem v Gaussově rovině je těžiště T trojúhelníku ABO .

str. 58

2 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Uzavřené úlohy

Úloha 18

2.1

Lesní školka tvaru obdélníku má rozměry m , p . Zmenšíme-li rozměr m o 10 % a současně zvětšíme rozměr p o 20 %, výměra pozemku školky:

- A/ se zvětší o 15 % B/ se zvětší o 12,5 % C/ se zvětší o 8 %
D/ se zmenší o 8 % E/ se zmenší o 15 %

Úloha 19

2.3

Hodnota výrazu $\frac{(x^{-2} - x^{-1})^{-1}}{x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ pro $x = 4$ je:

- A/ $\frac{16}{3}$ B/ $\frac{32}{3}$ C/ $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ D/ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ E/ $\frac{8}{3}$

Úloha 20

2.3

Koeficient u x v mnohočlenu, který dostaneme umocněním mnohočlenu $1 - x + x^2$ na čtvrtou, je roven:

- A/ -4 B/ -2 C/ -1 D/ 0 E/ 2

Úloha 21

2.2

Součet výrazů $\frac{1+x}{y}$ a $\frac{1+x}{xy}$ je pro všechna nenulová reálná čísla x , y k -násobkem jejich součinu, kde:

- A/ $k = y$ B/ $k = 2$ C/ $k = x$ D/ $k = xy$ E/ $k = 1$

Úloha 22

2.3

Pro výraz

$$V(x, y) = \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} + \frac{y^2 - 1}{xy - x + y^2 - y}$$

je hodnota součinu $V(3, 2) \cdot V(4, 2)$ rovna:

- A/ $\frac{7}{5}$ B/ $\frac{8}{5}$ C/ 1 D/ $\frac{20}{3}$

E/ číslu, které není prvkem množiny $\{\frac{7}{5}, \frac{8}{5}, 1, \frac{20}{3}\}$

Úloha 23

2.2

Pro každé $x \neq 0$ lze výraz $\frac{|-2x|}{|x|} + \frac{|x|}{|-3x|} - 1$ vyjádřit ve tvaru:

- A/ $\frac{|7x| - 3x^2}{3|x|}$ B/ $\frac{7}{3} - x$ C/ $\frac{7}{3} + x$
D/ $\frac{4}{3}$ E/ $\frac{4}{3}|x|$

Řešení: 18C, 19B, 20A, 21A, 22A, 23D

Úloha 24**2.1****ŘEŠENÍ**Výraz $|-2 + |x - 1||$ je pro každé $x < -1$ roven:

- A/
- $-x - 1$
- B/
- $-x + 1$
- C/
- $x + 1$
- D/
- $x - 3$
- E/
- $-x + 3$

Úloha 25**2.1**Mnohočlen $x^3 - 2x^2y + 4xy - 8y^2 - x + 2y$ lze zapsat jako součin dvou mnohočlenů, z nichž jeden je roven:

- A/
- $x^2 + 4y$
- B/
- $2xy + 1$
- C/
- $x^2 + 4y - 1$
-
- D/
- $x^2 - 1$
- E/
- $x + 2y$

Úloha 26**2.1**Výraz $\frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{(2x - 1)^2}$ je pro každé $x \neq \frac{1}{2}$ roven:

- A/ 0 B/
- $-1 + 2x$
- C/
- $2x$
- D/
- $2x + 1$
- E/
- x^2

Úloha 27**2.1**Zbytek při dělení mnohočlenu $(x + 2)^{10}$ jednočlenem x je roven:

- A/ 0 B/ 2 C/ 10 D/
- 10^2
- E/
- 2^{10}

Úloha 28**2.3**Výraz $\frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}$ je roven:
 $\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right)$

- A/
- $\frac{a+b}{a-b}$
- , pokud
- $a \neq 0$
- ,
- $b \neq 0$
- ,
- $a \neq b$
-
- B/
- $\frac{a+b}{a-b}$
- , pokud
- $a \neq 0$
- ,
- $b \neq 0$
- ,
- $a \neq -b$
-
- C/
- $\frac{a-b}{a+b}$
- , pokud
- $a \neq 0$
- ,
- $b \neq 0$
- ,
- $a \neq -b$
-
- D/
- $\frac{a-b}{a+b}$
- , pokud
- $a \neq 0$
- ,
- $b \neq 0$
- ,
- $a \neq b$
-
- E/
- a
- , pokud
- $a \neq 0$
- ,
- $b \neq 0$
- ,
- $a \neq -b$

Úloha 29**2.1**Pravidelný jehlan má čtvercovou podstavu. Délka podstavné hrany je a cm. Výška jehlanu je rovněž a cm. Zmenší-li se číslo a o x ($0 \leq x < a$), zmenší se objem jehlanu o:

- A/
- $(3a^2x + 3ax - x^3) \text{ cm}^3$
- B/
- $(a - x)^3 \text{ cm}^3$
-
- C/
- $x^3 \text{ cm}^3$
- D/
- $\frac{1}{3}(3a^2x - 3ax^2 + x^3) \text{ cm}^3$

Řešení: 24A, 25C, 26B, 27E, 28A, 29D

Úloha 30

2.2

Výrobek byl zdražen o $p\%$. Má-li cena výrobku klesnout na původní částku, je třeba cenu po zdražení snížit o:

- A/ $p\%$ B/ $0,5p\%$ C/ $\frac{100}{100-p}\%$
 D/ $\frac{100}{100+p}\%$ E/ $\frac{100p}{100+p}\%$

Úloha 31

2.1

Které z následujících tvrzení platí pro všechna reálná čísla x ?

- A/ Jestliže $x < 0$, potom $x^2 < x$.
 B/ Jestliže $x > 0$, potom $x^2 > x$.
 C/ Jestliže $x < -1$, potom $x^2 < x$.
 D/ Jestliže $x > 1$, potom $x^2 > x$.
 E/ Jestliže $x < 1$, potom $x^2 < x$.

Úloha 32

2.3

Úpravou výrazu

$$\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) : \frac{4(x+1)^2}{1-x^2}$$

dostaneme pro každé $x \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$ výraz:

- A/ $1-x$ B/ $1+x$ C/ x D/ $\frac{1}{2}$ E/ 4

Úloha 33

2.3

Výraz $\frac{1}{-1+\sqrt[3]{2}}$ se rovná:

- A/ $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ B/ $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1$ C/ $-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$
 D/ $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ E/ $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1$

Úloha 34

2.3

Výraz

$$\frac{x \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2y\sqrt{x}} \right)^{-1} + y \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2x\sqrt{y}} \right)^{-1}}{\left(\frac{x + \sqrt{xy}}{2xy} \right)^{-1} + \left(\frac{y + \sqrt{xy}}{2xy} \right)^{-1}}$$

je pro libovolná $x > 0$, $y > 0$ roven:

- A/ $\sqrt{xy}$ B/ $\frac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ C/ $\sqrt{x} + \sqrt{y}$
 D/ $xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ E/ xy

Úloha 35

2.2

ŘEŠENÍ

Čísla a, b mají tu vlastnost, že rovnost

$$\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$$

platí pro všechna čísla x , pro která mají obě její strany smysl. Výraz $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ má hodnotu:

- A/ 0 B/ 2 C/ $\frac{1}{2}$ D/ 4 E/ $-\frac{1}{2}$

Úloha 36

2.2

Nejmenší přirozené číslo n , pro které je hodnota výrazu

$$\left(\frac{n}{n^2 - 4} - \frac{8}{n^2 + 2n} \right) \cdot \frac{n^2 - 2n}{4 - n} + \frac{n + 8}{n + 2}$$

menší než 1, je číslo:

- A/ 8 B/ 9 C/ 10 D/ 11 E/ 12

Úloha 37

2.1

V rovnosti mnohočlenů

$$(2x^2 + ax + 6)(3x^2 + bx + 1) = 6x^4 - 13x^3 + cx^2 - 15x + 6$$

jsou a, b, c reálná čísla. Číslo c je rovno:

- A/ 18 B/ 26 C/ 2 D/ 20

E/ číslu, které není prvkem množiny $\{18, 26, 2, 20\}$ **Úloha 38**

2.2

Hodnota výrazu

$$\left(m + n - \frac{4mn}{m + n} \right) : \left(\frac{m}{m + n} - \frac{n}{n - m} - \frac{2mn}{m^2 - n^2} \right)$$

je pro $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{2}{3}$ rovna:

- A/ 1 B/ $-\frac{1}{6}$ C/ -6 D/ $\frac{1}{6}$ E/ 6

Úloha 39

2.2

Jsou-li a, b reálná čísla, pro která platí

$$\left(1 + \frac{a}{b} \right) : \left(b - \frac{a^2}{b} \right) = 1,$$

potom:

- A/ $a \notin \{-1, -\frac{1}{2}\}$ B/ $a \notin \{-1, 1\}$ C/ $a \notin \{0, 1\}$
 D/ $a \notin \{-1, 0, 1\}$ E/ $a \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$

Řešení: 35B, 36D, 37B, 38D, 39A

Otevřené úlohy

Úloha 40

2.1

- a) Pro přirozená čísla 7, 8, 9, 10 platí, že součet nejmenšího a největšího z nich se rovná absolutní hodnotě rozdílu druhých mocnin prostředních dvou čísel. Dokažte, že to platí pro libovolná čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla.
- b) Pro přirozená čísla 1 až 8 platí, že součet druhých mocnin prvního, čtvrtého, šestého a sedmého z nich se rovná součtu druhých mocnin druhého, třetího, pátého a osmého čísla. Dokažte, že to platí pro libovolných osm po sobě jdoucích přirozených čísel.

str. 59

Úloha 41

2.2

Je dán výraz $\frac{7s - 4 + 2s^2}{s(s + 2) - 8}$.

- a) Určete, pro která $s \in \mathbb{R}$ má smysl.
- b) Daný výraz zjednodušte.
- c) Ověřte správnost výsledku z části b) pro $s = \sqrt{3}$.
- d) Rozhodněte, pro která $s \in \mathbb{R}$ má daný výraz nezáporné hodnoty.

str. 59

Úloha 42

2.2

Označme x aritmetický průměr čísel a, b, c . Rozhodněte, které z rovností

$$\frac{a + b - 3c}{3} + \frac{a - 3b + c}{3} + \frac{-3a + b + c}{3} = -x,$$

$$(x - a) + (x - b) + (x - c) = 0,$$

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 + (x + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2$$

platí pro libovolná reálná čísla a, b, c .

str. 60

Úloha 43

2.3

Pro obsah S trojúhelníku se stranami délek a, b, c platí Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Zjednodušte tento vzorec:

- a) pro případ rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a
- b) pro případ rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna má délku c a rameno délku a

str. 61

Úloha 44**2.2****ŘEŠENÍ**

Vypočtete hodnotu výrazu

$$\left[\frac{a+3b}{(a-b)^2} + \frac{a-3b}{a^2-b^2} \right] : \frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2},$$

jestliže a, b jsou navzájem různá čísla, jejichž aritmetický průměr je 2.

str. 61

Úloha 45**2.2**

Je dán výraz

$$h(x) = \left[\frac{4x}{x^2+4} \cdot \left(\frac{2}{x^2-2x} + \frac{x}{2x-4} \right) - \frac{4}{x^2-4} \right] : \frac{x}{x-2}.$$

- a) Určete množinu M všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je výraz $h(x)$ definován.
b) Dokažte, že pro všechna $x \in M$ platí $h(x) = \frac{2}{x+2}$.
c) Určete množinu všech celých čísel x , pro něž je hodnota výrazu $h(x)$ rovna celému číslu.
d) V soustavě souřadnic Oxy zakreslete graf funkce $y = h(x)$.

str. 62

Úloha 46**2.2**

- a) V oboru komplexních čísel řešte rovnici $m^3 + 216 = 0$.
b) Určete, pro která $m \in \mathbb{R}$ má výraz

$$\frac{m^3 + 216}{5m - 30} : \left(m + \frac{36}{m-6} \right)$$

smysl, a zjednodušte ho.

- c) Určete, pro která $m \in \mathbb{R}$ nabývá výraz $m + \frac{36}{m-6}$ kladných hodnot.

str. 62

Úloha 47**2.1**

Reálná čísla a, b, c jsou taková, že mnohočlen $x^4 - x^3 - 7x^2$ dává při dělení mnohočlenem $x^2 - 3x + a$ neúplný podíl $x^2 + bx - 2$ a zbytek $cx + 2$. Určete číslo c .

str. 63

Úloha 48**2.3**

Je dán výraz

$$V(x) = \frac{(x^2+1) \cdot |x|}{x \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2 + 1}}.$$

- a) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz $V(x)$ definován.
b) Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž $V(x) = 0$.
c) Daný výraz zjednodušte.

str. 63

Úloha 49

2.2

Najděte všechna celá čísla a , pro která je hodnota výrazu

$$V(a) = \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6}$$

rovna celému číslu.

str. 64

Úloha 50

2.2

Dva kamarádi si vymysleli jiný předpis pro sčítání dvou zlomků. Sčítají je tak, že součet čítelů vydělí součtem jmenovatelů. Kdy se součet zlomků podle jejich předpisu rovná aritmetickému průměru těchto zlomků vypočítanému obvyklým způsobem?

str. 64

3 ROVNICE A NEROVNICE

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 51

3.2

Rovnice $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ v oboru komplexních čísel:

- A/ nemá žádné řešení B/ má právě jeden kořen
C/ má právě dva kořeny D/ má právě čtyři kořeny
E/ má nekonečně mnoho řešení

Úloha 52

3.1

Řidič na třídní cestě spotřeboval první den polovinu nádrže nafty, druhý den pětinu zbytku a poslední den čtyři pětiny zbytku po druhém dni. Na konci cesty mu zbylo 10 litrů nafty. Objem nádrže vozu, která byla na počátku cesty plná, je:

- A/ 105 litrů B/ 125 litrů C/ 135 litrů D/ 150 litrů E/ 160 litrů

Úloha 53

3.2

Rovnice $\frac{1 + \frac{10}{m}}{\frac{100}{m^2} - 1} = 1$ v oboru celých čísel:

- A/ nemá žádné řešení
B/ má právě jedno řešení a je to kladné číslo
C/ má právě jedno řešení a je to záporné číslo
D/ má právě dvě řešení, z nichž jedno je kladné číslo a druhé záporné číslo
E/ má právě dvě řešení a obě jsou kladná čísla

Úloha 54

3.4

Výraz $z(z+2)$ nemá větší hodnotu než výraz $18-z$ právě pro:

- A/ $z \in \langle -6, 3 \rangle$ B/ $z \in (-3, 6)$ C/ $z \in (-2, 6)$
D/ $z \in (-\infty, -2)$ E/ $z \in (2, \infty)$

Úloha 55

3.4

Množina všech řešení soustavy nerovnic $x^2 - 4 < 0$, $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ v intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ je:

- A/ $\langle \frac{3}{2}, 2 \rangle$ B/ $\langle 1, 2 \rangle$ C/ $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$ D/ $\langle 1, 2 \rangle$ E/ $(1, \frac{3}{2})$

Úloha 56

3.4

Počet komplexních jednotek $a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, které mají imaginární část o 1 větší než část reálnou, je:

- A/ 0 B/ 1 C/ 2 D/ 4 E/ větší než 4

Řešení: 51 D, 52 B, 53 B, 54 A, 55 B, 56 C

Úloha 57

3.4

Množina všech řešení nerovnice $(x-3)(x+4) < 8$ v oboru reálných čísel je:

A/ $(-4, 3)$

B/ $(-3, 4)$

C/ $(-\infty, -5) \cup (4, \infty)$

D/ $(-5, 4)$

E/ $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

Úloha 58

3.3

Množina všech řešení rovnice $\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{1-x} = 1$ v oboru reálných čísel je:

A/ $\emptyset$

B/ $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

C/ $(-\infty, 1)$

D/ $(1, \infty)$

E/ $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Úloha 59

3.1

Vyjádríme-li ze vzorce

$$W_1 - W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

neznámou r_1 , dostaneme:

A/ $r_1 = r_2 - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon(W_1 - W_2)}$

B/ $r_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon(W_1 - W_2)} - r_2$

C/ $r_1 = \frac{4\pi\epsilon(W_1 - W_2) - q_1 q_2}{q_1 q_2 r_2}$

D/ $r_1 = \frac{q_1 q_2 - 4\pi\epsilon(W_1 - W_2)}{q_1 q_2 r_2}$

E/ $r_1 = \frac{q_1 q_2 r_2}{q_1 q_2 - 4\pi\epsilon(W_1 - W_2) r_2}$

Úloha 60

3.3

Rovnice $\sqrt{1 - \sqrt{5 - 2x}} = \sqrt{x}$ v oboru celých čísel:

A/ má nekonečně mnoho řešení

B/ má právě dvě řešení

C/ má právě jedno řešení a je to kladné číslo

D/ má právě jedno řešení a je to záporné číslo

E/ nemá žádné řešení

Úloha 61

3.4

Množina všech řešení nerovnice $\frac{16}{(x-2)^2} > 4$ v oboru reálných čísel je:

A/ $\emptyset$

B/ $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

C/ $(-2, 0) \cup (0, 2)$

D/ $(0, 2) \cup (2, 4)$

E/ $(0, 4)$

Řešení: 57D, 58C, 59E, 60E, 61D

Úloha 62**3.2** **ŘEŠENÍ**

Počet všech celých čísel, která jsou řešeními rovnice

$$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0,$$

je roven:

- A/ 0 B/ 1 C/ 2 D/ 3 E/ 4

Úloha 63**3.2**Rovnice $x^2 + ax + a + 1 = 0$ s reálným parametrem a má dva imaginární kořeny právě tehdy, když:

- A/ $a = 0$ B/ $a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$
 C/ $a \in (-1, 1)$ D/ $a \in (0, 2 + 2\sqrt{2})$
 E/ $a \neq 1$

Úloha 64**3.4**Definičním oborem funkce $f: y = \frac{\sqrt{x+19}}{\sqrt{|x|-x}}$ je množina:

- A/ $\langle -19, 0 \rangle \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ B/ $\langle -19, 0 \rangle \cup (0, \infty)$
 C/ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ D/ $(0, \infty)$
 E/ $\langle -19, 0 \rangle$

Úloha 65**3.4**Množina všech řešení nerovnice $\frac{x+x^2}{x-x^2} < 1$ v oboru reálných čísel je:

- A/ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ B/ $(0, 1) \cup (1, \infty)$ C/ $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
 D/ $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ E/ $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Úloha 66**3.2**

Soustava rovnic

$$x + 4y + c = 0, \quad y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$$

s parametrem c nemá žádné řešení právě tehdy, když:

- A/ $c \in (-\infty, 8)$ B/ $c \in (-8, \infty)$ C/ $c \in (-\infty, -8)$
 D/ $c \in (8, \infty)$ E/ $c \in \mathbb{R}$

Úloha 67**3.2**Součet druhých mocnin kořenů kvadratické rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ je:

- A/ -1 B/ 1 C/ $2i$ D/ $-2i$ E/ 0

Úloha 68**3.4**Množina všech řešení nerovnice $x - |x - 2| \geq |x|$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je:

- A/ $\{2\}$ B/ $\langle 2, \infty \rangle$ C/ $\emptyset$ D/ $\langle 0, 2 \rangle$ E/ $(-\infty, 2 \rangle$

Řešení: 62E, 63B, 64E, 65D, 66C, 67A, 68A

Úloha 69

3.4

Které z následujících tvrzení neplatí pro každé $x \in \mathbb{R}$?

A/ $|x - 3| \leq 1$ právě tehdy, když $x \in \langle 2, 4 \rangle$.

B/ $|x + 2| > 1$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$.

C/ $|x + \sqrt{3}| = 1$ právě tehdy, když $x \in \{-\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} + 1\}$.

D/ $|x - \sqrt{2}| < 2$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, \sqrt{2} - 2) \cup (\sqrt{2} + 2, \infty)$.

E/ $|x + 1| \geq 1 + \sqrt{2}$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup \langle \sqrt{2}, \infty \rangle$.

Úloha 70

3.1

Jedním řešením rovnice $x(4 + 3i) - 3y(1 + i) = 1$ je dvojice reálných čísel:

A/ $(x, y) = (1, 0)$

B/ $(x, y) = (0, 1)$

C/ $(x, y) = (1, 1)$

D/ $(x, y) = (1, -1)$

E/ $(x, y) = (-1, -1)$

Úloha 71

3.1

Rovnice $|x + 3| + |x - 4| = 7$ v intervalu $\langle 1, 5 \rangle$:

A/ nemá žádné řešení

B/ má právě jedno řešení

C/ má právě dvě řešení

D/ má právě tři řešení

E/ má nekonečně mnoho řešení

Úloha 72

3.4

Množina všech reálných čísel p , pro která má rovnice

$$4x^2 + 4px + p^2 - 4 = 0$$

jeden kořen menší než -1 a druhý kořen větší než $\frac{1}{2}$, je:

A/ $(-\infty, -1)$

B/ $(-1, 1)$

C/ $(-\infty, 1)$

D/ $(0, 1)$

E/ $(1, \infty)$

Úloha 73

3.4

Řešeními nerovnice $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$ jsou právě všechna reálná čísla x , pro která platí:

A/ $x \in \langle 7, \infty \rangle$

B/ $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$

C/ $x \in (-3, 2) \cup \langle 7, \infty \rangle$

D/ $x \in (-\infty, -3) \cup (2, 7)$

E/ $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 7, \infty \rangle$

Úloha 74

3.2

Rovnice $x^2 + 2ax + a^2 - 8 = 0$ s reálným parametrem a má dva různé záporné kořeny právě tehdy, když:

A/ $a \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

B/ $a \in (-2\sqrt{2}, \infty)$

C/ $a \in (-\infty, 2\sqrt{2})$

D/ $a \in (2\sqrt{2}, \infty)$

E/ $a \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Řešení: 69D, 70C, 71E, 72D, 73C, 74D

Úloha 75**3.2**

Dva obdélníky mají týž obsah $7,2\text{ cm}^2$. Šířky těchto obdélníků se liší o 4 mm, jejich délky se liší o 6 mm. Větší z obvodů obou obdélníků je:

A/ 8,2 cm B/ 10,8 cm C/ 11,2 cm D/ 12,6 cm E/ 16,4 cm

Úloha 76**3.4**

Množina všech řešení nerovnice $\sqrt{x^2 + 2} \geq 2 - x$ v oboru reálných čísel je:

A/ $(-2, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$ B/ $\langle 1, 2 \rangle$ C/ $\langle 1, \infty)$

D/ $\langle \frac{1}{2}, \infty)$ E/ $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

Úloha 77**3.2**

Normovaná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, která má kořen $\frac{1+i}{1-i}$, je:

A/ $x^2 - x + 1 = 0$ B/ $x^2 + x - 1 = 0$ C/ $x^2 - x - 1 = 0$

D/ $x^2 + x + 1 = 0$ E/ $x^2 + 1 = 0$

Úloha 78**3.2**

Jestliže kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ s reálnými parametry p, q má nenulové kořeny r a s , pak výraz $\frac{r}{s} + \frac{s}{r}$ je roven:

A/ $\frac{p^2 - 3q}{q}$ B/ $\frac{p^2 + q}{q}$ C/ $\frac{p^2 - q}{q}$ D/ $\frac{p^2 - 2q}{q}$ E/ $\frac{p^2 + 2q}{q}$

Úloha 79**3.1**

Součet dvou přirozených čísel je 2004. Vydělíme-li větší z obou čísel menším z nich, dostaneme neúplný podíl 21 a zbytek 46. Ciferný součet většího čísla je roven:

A/ 15 B/ 16 C/ 17 D/ 18

E/ číslu, které není prvkem množiny $\{15, 16, 17, 18\}$

Úloha 80**3.2**

Jestliže rovnice $A(x) = 0$ nemá žádné řešení, rovnice $B(x) = 0$ má jedno řešení a rovnice $C(x) = 0$ má dvě různá řešení, potom rovnice $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0$ má:

A/ právě jedno řešení B/ nejvýše dvě různá řešení

C/ právě dvě různá řešení D/ nejvýše tři různá řešení

E/ právě tři různá řešení

Řešení: 75 C, 76 D, 77 E, 78 D, 79 B, 80 D

Úloha 81

3.2

O daném pravoúhelníku, jehož rozměry v metrech jsou dány celými čísly, víme: Prodloužíme-li každou jeho stranu o 4 m, dostaneme pravoúhelník, jehož obsah bude o 16 m^2 větší než dvojnásobek obsahu daného pravoúhelníku. Z těchto údajů vyplývá, že rozměry daného pravoúhelníku jsou:

- A/ 5 m a 20 m, nebo 6 m a 8 m
- B/ 5 m a 20 m, nebo 8 m a 12 m
- C/ 6 m a 12 m, nebo 6 m a 8 m
- D/ 5 m a 20 m, nebo 6 m a 12 m, nebo 8 m a 10 m
- E/ 5 m a 20 m, nebo 6 m a 12 m, nebo 8 m a 8 m

Otevřené úlohy**Úloha 82**

3.4

Určete množinu všech řešení nerovnice

$$x + x^2 - |3x + 2| + 2|x - 1| \leq (x - 1)^2$$

v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

str. 65

Úloha 83

3.2

Najděte všechna reálná čísla p , pro něž má rovnice

$$px^2 + (5p - 1)x + 4p - 1 = 0$$

dva kořeny, jejichž rozdíl se rovná 1.

str. 65

Úloha 84

3.1

Určete všechna reálná čísla a , pro která rovnice $ax + 2 = a - 2x$ s neznámou x :

- a) nemá řešení
- b) má právě jeden kořen a ten je nezáporný
- c) má právě jeden kořen a ten je záporný

str. 66

Úloha 85

3.3

Je dána rovnice $\sqrt{x - 1} + x = 3$.

- a) Řešte ji v oboru reálných čísel.
- b) Do jedné soustavy souřadnic Oxy zakreslete grafy funkcí $f: y = \sqrt{x - 1}$ a $g: y = -x + 3$.
- c) Určete definiční obor a obor hodnot funkce f .
- d) Určete z grafu i početně, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < 2$.

str. 66

Úloha 86**3.1****ŘEŠENÍ**

Je dána soustava rovnic:

$$x + y + z = 4$$

$$2x + y + 2z = 6$$

$$4x + by + cz = 14$$

- a) Určete koeficienty b, c tak, aby do množiny řešení dané soustavy patřily uspořádané trojice $(x_1, y_1, z_1) = (0, 2, 2)$ a $(x_2, y_2, z_2) = (1, 2, 1)$.
b) Vyřešte danou soustavu rovnic s koeficienty b, c nalezenými v části a).
c) Ze všech řešení (x, y, z) soustavy z části b) vyberte ta, pro která $z = 0$.

str. 67

Úloha 87**3.1**

V oboru reálných čísel řešte rovnici $2|x| - p = \frac{2|x| - 1}{p}$ s neznámou x a nenulovým reálným parametrem p .

str. 67

Úloha 88**3.4**

V soustavě souřadnic Oxy znázorněte množinu všech řešení soustavy nerovnic

$$y > x^2 + 2x - 3, \quad x - y + 5 \geq 0.$$

str. 68

Úloha 89**3.1**

Odlitek složený ze stříbra a mědi jsme nejprve přetavili s 5 kg čistého stříbra. Výsledný odlitek jsme pak znovu přetavili, tentokrát s 5 kg čisté mědi. Po prvním přetavení bylo ve slitině 60 % stříbra, po druhém přetavení už jen 48 % stříbra. Kolik procent stříbra bylo ve slitině před prvním přetavením?

str. 68

Úloha 90**3.2**

Je dána rovnice $ax^2 + ax + 5 = 0$ s neznámou x a reálným parametrem a .

- a) Pro které hodnoty parametru a má tato rovnice dva různé reálné kořeny?
b) Určete všechny hodnoty parametru a , pro které má daná rovnice dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobkem druhého.

str. 69

Úloha 91**3.2**

Z opačných konců silniční trasy dlouhé 220 km vyjela proti sobě v 8 hodin dvě auta. Každé z nich jelo celou trasu stálou rychlostí. Obě auta se minula krátce po desáté hodině; v 10:00 je totiž oddělovaly pouhé 4 km. Rychlejší auto dorazilo do cíle o 55 minut dříve než pomalejší auto. V kolik hodin to bylo?

str. 70

Úloha 92**3.3**

V oboru reálných čísel řešte rovnici $1 + \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x$.

str. 70

Úloha 93

3.2

Obvod tanečního sálu obdélníkového tvaru je 28 m. V rohu A jsou shromážděna děvčata a v rohu C chlapci (viz obrázek). Vypočtete, kolik metrů musí ujít děvčata a kolik chlapci, než se dostanou do bodu B , odkud začínají tanec v páru, jestliže $|AB| > |BC|$ a:



- vzdálenost mezi A a C je 10 m
- délky stran BC a AB jsou v poměru 2 : 3
- obsah podlahy tanečního sálu je 45 m^2

str. 71

Úloha 94

3.1

Muž vysoký 180 cm jde po vodorovné silnici přímo ke stožáru, na kterém svítí reflektor směrem k muži. V jistém okamžiku byl jeho stín dlouhý 10,8 m. Po ujití dalších 90 m je jeho stín dlouhý 4,8 m.

- Vypočtete výšku reflektoru nad silnici.
- Kolik metrů musí muž ještě ujít, aby byl jeho stín dlouhý 1 m?

str. 72

Úloha 95

3.2

V oboru komplexních čísel uvažujme rovnici $z + \bar{z} \cdot (2 + i) = z \cdot \bar{z}$, v níž $\bar{z}$ je číslo komplexně sdružené k číslu z .

- Dokažte, že položíme-li $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, potom porovnáním reálných částí výrazů na levé a pravé straně dané rovnice dostaneme $3x + y = x^2 + y^2$ a porovnáním imaginárních částí dostaneme $x - y = 0$. Danou rovnici tímto způsobem dorešte.
- V soustavě souřadnic Oxy zobrazte množiny bodů určené rovnicemi $3x + y = x^2 + y^2$ a $x - y = 0$. Z obrázku vyčtete řešení dané rovnice.

str. 73

Úloha 96

3.1

Otec se synem mají za úkol natřít plot kolem rodinné zahrady. Bude-li nejprve plot natírat jedna osoba, otec sám a pak se k němu připojí syn, zvládnou úkol po devíti hodinách společné práce. Bude-li nejprve plot natírat čtyři hodiny syn sám a pak se k němu připojí otec, zvládnou úkol po osmi hodinách společné práce. Za jak dlouho zvládnou úkol, budou-li plot natírat od začátku společně?

str. 73

4 FUNKCE

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 97

4.6

Množina všech řešení rovnice $\frac{2^{x^2-x}}{4^{x-1}} = (\sqrt{2})^{x+4}$ je:

- A/ $\{0\}$ B/ $\{0, 2\}$ C/ $\{0, \frac{5}{2}\}$ D/ $\{0, 3\}$ E/ $\{0, \frac{7}{2}\}$

Úloha 98

4.7

Rovnice $2 \cos x = \frac{a-1}{3}$ s neznámou x má řešení právě tehdy, když pro číslo a platí:

- A/ $a \in (-\infty, 4)$ B/ $a \in (-\infty, 7)$ C/ $a \in \langle -1, 1 \rangle$
D/ $a \in \langle -2, 4 \rangle$ E/ $a \in \langle -5, 7 \rangle$

Úloha 99

4.1

Definičním oborem funkce $y = \sqrt{x^2 - c}$ je pro dané číslo $c < 0$ množina:

- A/ $\emptyset$ B/ $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$
C/ $\langle -\sqrt{-c}, \sqrt{-c} \rangle$ D/ $(-\infty, -\sqrt{-c}) \cup (\sqrt{-c}, \infty)$
E/ $\mathbb{R}$

Úloha 100

4.5

Jsou dány funkce $f_1: y = \frac{2}{x} + 3$ a $f_2: y = \frac{2}{x-1}$. Posunutí, které zobrazí graf funkce f_1 na graf funkce f_2 , je určeno vektorem:

- A/ $(-1, 3)$ B/ $(1, 0)$ C/ $(1, 3)$ D/ $(1, -3)$ E/ $(0, 3)$

Úloha 101

4.2

Karel a Ivana odjeli společně na dva týdny na hory. Karel měl 5 560 Kč a denně utratil 384 Kč. Ivana měla 4 600 Kč, první dva dny neutratila nic, od třetího dne utratila denně 348 Kč. Závislost rozdílu r Kč jejich hotovostí na počtu x dnů pobytu na horách vyjadřuje pro $x > 2$ funkce:

- A/ $r = 132 - 18x$ B/ $r = 480 - 18x$ C/ $r = 264 - 36x$
D/ $r = 380 - 24x$ E/ $r = 440 - 36x$

Úloha 102

4.7

Grafy funkcí $f: y = \cos x$ a $g: y = \sin 2x$ zakreslené v téže soustavě souřadnic se pro $x \in \langle 0, 100\pi \rangle$ protnou:

- A/ 50krát B/ 100krát C/ 150krát D/ 200krát

Řešení: 97E, 98E, 99E, 100D, 101C, 102D

Úloha 103

4.2

Na obrázku je graf funkce:

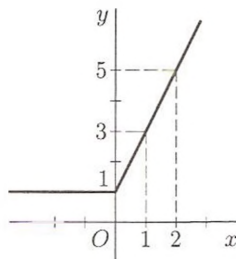
A/ $y = |x| - x + 1$

B/ $y = x - |x|$

C/ $y = x + |x| + 1$

D/ $y = 2x + |x| - 1$

E/ $y = 2x - |x|$



Úloha 104

4.3

Inverzní funkce k funkci $f: y = -x^2, x \in (-\infty, 0)$, je dána předpisem:

A/ $y = \sqrt{-x}, x \in (-\infty, 0)$

B/ $y = -\sqrt{x}, x \in \langle 0, \infty)$

C/ $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, \infty)$

D/ $y = -\sqrt{-x}, x \in (-\infty, 0)$

E/ $y = -\sqrt{|x|}, x \in (-\infty, \infty)$

Úloha 105

4.3

Vrchol paraboly, která je grafem funkce $f: y = -2x^2 - 8x + 7$, je středem úsečky, jejímž jedním krajním bodem je počátek soustavy souřadnic a druhým krajním bodem bod:

A/ $[-4, 25]$

B/ $[30, -4]$

C/ $[-2, 15]$

D/ $[15, -2]$

E/ $[-4, 30]$

Úloha 106

4.7

Z funkcí

$f_1: y = \sin |x|, \quad f_2: y = \cos |x|, \quad f_3: y = |\sin x|, \quad f_4: y = |\cos x|:$

A/ jsou všechny periodické

B/ není periodická pouze funkce f_1 C/ nejsou periodické pouze funkce f_1 a f_2 D/ nejsou periodické pouze funkce f_3 a f_4

E/ není periodická žádná

Úloha 107

4.6

Definičním oborem funkce $f: y = \log(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})$ je sjednocení všech intervalů:

A/ $(\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

B/ $(\frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

C/ $(-\frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

D/ $(-\frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

E/ $(-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

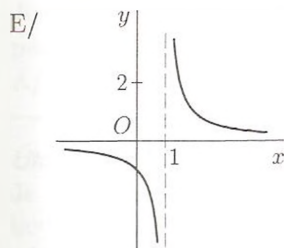
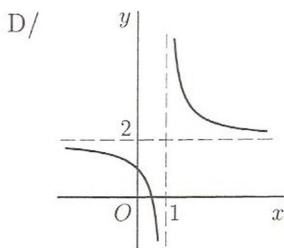
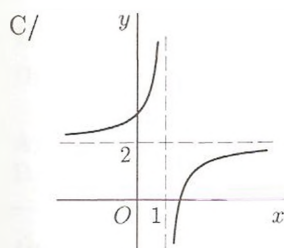
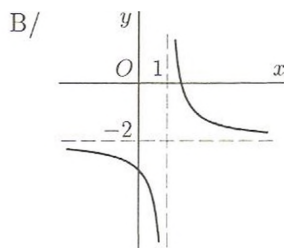
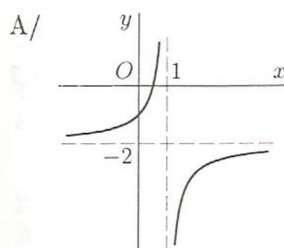
Řešení: 103C, 104D, 105E, 106B, 107C

Úloha 108

4.5

ŘEŠENÍ

Graf funkce $f: y = \frac{1-2x}{x-1}$ je na obrázku:



Úloha 109

4.2

Hodnoty funkce $f: y = |x-2| - 2|x| - x$ jsou nezáporné právě pro všechna:

A/ $x \in (-\infty, 1)$

B/ $x \in \langle 0, \infty \rangle$

C/ $x \in (-\infty, 2)$

D/ $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

E/ $x \in \langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle$

Úloha 110

4.6

Závislost výšky stromu na čase je přibližně dána vzorcem

$$h = 100 \cdot e^{0,3t} - 30,$$

kde t je číselná hodnota stáří stromu vyjádřená v letech a h číselná hodnota jeho výšky v centimetrech. Stáří stromu, jehož výška je 8 m, je přibližně:

A/ 5 let

B/ 7 let

C/ 10 let

D/ 12 let

E/ 15 let

Řešení: 108 A, 109 D, 110 B

Úloha 111

4.6

Všechna kladná řešení rovnice $\log^2 x^2 = \log x^4$ leží v intervalu:

A/ $(0, 1)$

B/ $(0, 10)$

C/ $\langle 1, 10 \rangle$

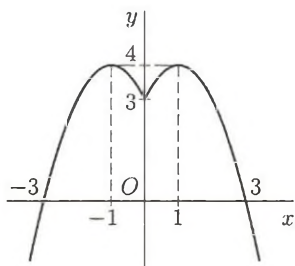
D/ $(1, 100)$

Úloha 112

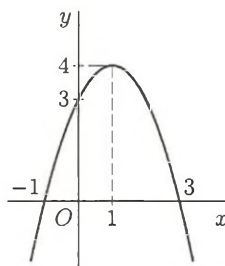
4.3

Graf funkce $f: y = -x^2 + 2|x| + 3$ je na obrázku:

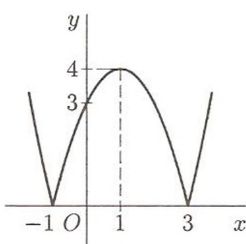
A/



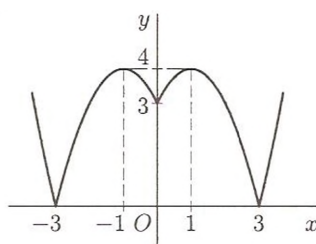
B/



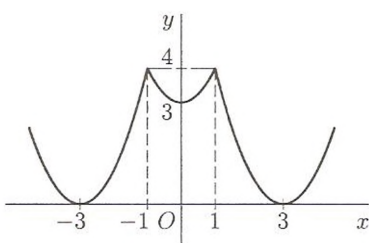
C/



D/



E/



Úloha 113

4.5

Jestliže funkce f je dána předpisem $f: y = \frac{1}{1-x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, potom funkce $g: y = f(f(x))$ je dána předpisem:

A/ $y = \frac{1}{1-x}$

B/ $y = \frac{x}{1-x}$

C/ $y = \frac{x-1}{x}$

D/ $y = 1-x$

E/ $y = x$

Řešení: 111B, 112A, 113C

Úloha 114**4.1****ŘEŠENÍ**

Oborem hodnot funkce $f: y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2 - x}$ je množina:

- A/ $\langle -1, \infty \rangle$ B/ $\langle 1, \infty \rangle$ C/ $(-\infty, 0)$ D/ $(-\infty, 1)$ E/ $(-\infty, -1)$

Úloha 115**4.2**

Graf lineární funkce $y = f(x)$ prochází body $A[50, -1]$ a $B[51, 3]$. Součet

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$$

je roven číslu:

- A/ 0 B/ 100 C/ 200 D/ 400 E/ -200

Úloha 116**4.6**

Definičním oborem funkce $f: y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}}$ je množina:

- A/ $\langle -1, 0 \rangle$ B/ $(-\infty, 1) \cup \langle 2, \infty \rangle$ C/ $(1, \infty)$
D/ $\langle 2, \infty \rangle$ E/ $(1, 2)$

Úloha 117**4.1**

Je dána funkce $f: y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$. Všechna čísla c , pro která platí $f(\frac{1}{c}) = -\frac{1}{2}$, patří do množiny:

- A/ $\emptyset$ B/ $\{-1\}$ C/ $\{-1, 2\}$ D/ $\{2\}$ E/ $\{1, -\frac{1}{2}\}$

Úloha 118**4.3**

Je dána koule o poloměru r cm. Funkce, která popisuje závislost číselné hodnoty objemu V (vyjádřeného v cm^3) válce vepsaného do dané koule na výšce v cm tohoto válce, je dána předpisem:

- A/ $V = \pi v \cdot (r^2 - \frac{1}{4}v^2)$, $v \in (0, 2r)$
B/ $V = \frac{1}{2}\pi v \cdot (r^2 - \frac{1}{4}v^2)$, $v \in (0, 2r)$
C/ $V = \pi v \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}v^2}$, $v \in (0, 2r)$
D/ $V = \frac{1}{2}\pi v \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}v^2}$, $v \in (0, 2r)$
E/ $V = \pi r^2 v + \frac{1}{2}\pi v^3$, $v \in (0, 2r)$

Otevřené úlohy**Úloha 119****4.2**

a) Sestrojte graf funkce $f: y = ||x| - 5|$.

b) Řešte rovnici $||x| - 5| = c$, kde c je reálný parametr.

str. 74

Řešení: 114D, 115B, 116D, 117C, 118A

Úloha 120

4.6

Jsou dány funkce $f: y = 3^{\frac{6+x}{x}}$ a $g: y = (\sqrt{3})^{x+1}$.

- Určete definiční obory D_f a D_g funkcí f a g .
- Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = g(x)$.
- Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \geq g(x)$.
- Sestrojte graf funkce g .

str. 74

Úloha 121

4.2

Jsou dány funkce $f: y = \frac{1}{2}x + 1$ a $g: y = 3x + 6$.

- Sestavte předpisy pro funkce f^{-1} a g^{-1} inverzní k funkcím f, g a v téže soustavě souřadnic Oxy sestrojte grafy všech čtyř funkcí.
- Vypočítejte délky úhlopříček čtyřúhelníku, který je ohraničen grafy funkcí f, g, f^{-1}, g^{-1} .

str. 75

Úloha 122

4.5

Je dána funkce $f: y = \frac{2(x^2 - x)}{x^2 + 2x - 3}$.

- Určete definiční obor D_f a obor hodnot H_f funkce f a sestrojte její graf.
- Napište předpis pro inverzní funkci f^{-1} , určete její definiční obor a obor hodnot.

str. 76

Úloha 123

4.5

Plná protipožární bedna s pískem má hmotnost 200 kg, hmotnost prázdné bedny je 10 kg.

- Kolik procent celkové hmotnosti plné bedny tvoří hmotnost písku?
- Kolik kilogramů písku je třeba odebrat, aby hmotnost písku v bedně tvořila 75 % celkové hmotnosti?
- Sestavte funkci vyjadřující závislost počtu procent y hmotnosti písku v bedně na číselné hodnotě x (v kg) hmotnosti písku odebraného z bedny.
- Zakreslete graf funkce z bodu c).

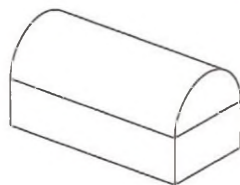
str. 77

Úloha 124

4.1

Truhla má tvar kvádrů s víkem tvaru poloviny rotačního válce.

- Vyjádřete číselnou hodnotu (v dm^3) objemu truhly včetně prostoru pod víkem jako funkci číselné hodnoty (v dm) délky nejkratší hrany kvádrů; přitom postupný poměr šířky, délky a výšky kvádrů je 2 : 4 : 1.
- Určete definiční obor funkce z bodu a) pro truhly s povrchem mezi 300 dm^2 a 800 dm^2 .
- Určete rozměry kvádrů, je-li povrch víka truhly $80\pi \text{ dm}^2$.



str. 78

Úloha 125**4.6****ŘEŠENÍ**

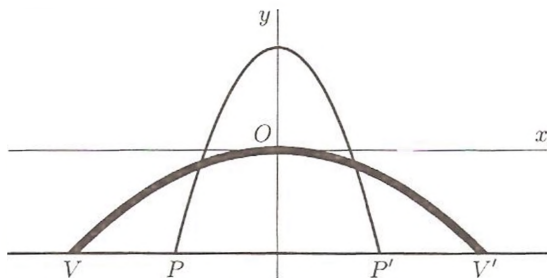
a) Dokažte, že pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, platí $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

b) Řešte rovnici $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$.

str. 78

Úloha 126**4.3**

Pěší lávka nad dálnicí má tvar části paraboly znázorněné na obrázku tučnou čarou. Její vrchol je 8 m nad povrchem dálnice. Oblouk podpírající lávku má rovněž tvar paraboly. Tato parabola je grafem funkce $y = -\frac{1}{4}x^2 + 8$ v soustavě souřadnic Oxy vyznačené v obrázku s jednotkami délky 1 m na obou osách. Vrchol podpěrného oblouku je 16 m nad povrchem dálnice. Vstupy na lávku V , V' jsou od pat oblouku P , P' vzdáleny 8 m. Určete funkci, jejímž grafem v uvažované soustavě souřadnic je část paraboly znázorňující lávku.



str. 79

Úloha 127**4.7**

Najděte všechna řešení rovnice $\cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$, která patří do intervalu $(-\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{4}\pi)$.

str. 79

Úloha 128**4.3**

Řešte rovnici $4^{-2 \sin x} - 4^{-\sin x} - 2 < 0$.

str. 80

Úloha 129**4.3**

Grafy funkcí $f_1: y = x^2 + 4x + q$ a $f_2: y = ax^2 + 2bx + 5$ jsou paraboly, které jsou souměrně sdružené podle osy o rovnici $y = 1$. Určete čísla a , b , q .

str. 81

5 POSLOUPNOSTI

Uzavřené úlohy

Úloha 130

5.2

Součin $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{128}$, kde i je imaginární jednotka, je roven:

- A/ 1 B/ -1 C/ i D/ $-i$

Úloha 131

5.2

Součet všech trojčiferných přirozených čísel dělitelných sedmi je:

- A/ 70 016 B/ 70 336 C/ 70 400 D/ 140 032 E/ 140 672

Úloha 132

5.1

Čísla $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (v tomto pořadí):

- A/ jsou prvními třemi členy aritmetické posloupnosti
 B/ jsou prvními třemi členy geometrické posloupnosti
 C/ jsou prvními třemi členy aritmetické posloupnosti a zároveň prvními třemi členy geometrické posloupnosti
 D/ nejsou prvními třemi členy žádné aritmetické ani geometrické posloupnosti

Úloha 133

5.3

Jestliže reálná čísla a , b , c (v tomto pořadí) jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem 2, potom kořenem kvadratické rovnice $ax^2 - 2bx + c = 0$ je číslo:

- A/ -2 B/ 2 C/ 4 D/ $-a$ E/ $a + b$

Úloha 134

5.3

Pro geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 < 0$ a kvocientem $q = -2$ jsou vyslovena tato tvrzení:

1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.
2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající.
3. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená.
4. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená.

Z těchto tvrzení:

- A/ není pravdivé žádné B/ je pravdivé právě jedno
 C/ jsou pravdivá právě dvě D/ jsou pravdivá právě tři
 E/ jsou pravdivá všechna

Úloha 135**5.2****ŘEŠENÍ**

Součet

$$2n + (2n - 1) + (2n - 2) + (2n - 3) + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

se pro každé $n \in \mathbb{N}$ od součtu

$$2n - (2n - 1) + (2n - 2) - (2n - 3) + \dots + 4 - 3 + 2 - 1$$

liší o:

A/ $2n^2$

B/ $2n^4 + n$

C/ $n^2(2n - 1)$

D/ $\frac{1}{2}n(2n + 1)$

E/ $\frac{1}{2}n(2n - 3)$

Úloha 136**5.1**

Počet různých čísel mezi členy nekonečné posloupnosti

$$\lg 5^\circ, \lg 85^\circ, \lg 165^\circ, \lg 245^\circ, \lg 325^\circ, \dots,$$

kde se úhly postupně zvětšují o 80° , je:

A/ 8

B/ 9

C/ 10

D/ 11

E/ nekonečný

Úloha 137**5.2**Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ platí $a_3 + a_9 = 8$. Součet prvních jedenácti členů této posloupnosti je:

A/ 38

B/ 40

C/ 44

D/ 56

E/ 78

Úloha 138**5.2**

Počet rostoucích aritmetických posloupností, jejichž všechny členy jsou přirozená čísla a jejichž devátý člen je roven 45, je:

A/ 5

B/ 8

C/ 12

D/ 20

E/ nekonečný

Úloha 139**5.4**

Objektiv s proměnnou ohniskovou vzdáleností (zoom) je optická soustava skládající se z mnoha čoček a optických rozhraní. Na každém optickém rozhraní se ztrácí alespoň 2 % intenzity dopadajícího světla. Nejmenší možná světelnost objektivu (tj. poměr intenzity světla dopadajícího na objektiv a intenzity světla prošlého objektivem) je 8,5. Největší možný počet optických rozhraní, kterými může procházet světlo v objektivu tak, aby všechny uvedené podmínky byly splněny, je:

A/ 24

B/ 42

C/ 75

D/ 86

E/ 105

Úloha 140**5.3**

Geometrická posloupnost kladných čísel má tu vlastnost, že součet jejích prvních dvou členů je roven jedné a součet jejích prvních čtyř členů je roven třem. První člen této posloupnosti je:

A/ $\sqrt{2} - 1$

B/ $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})$

C/ $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$

D/ $\frac{1}{4}$

E/ $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

Řešení: 135 A, 136 B, 137 C, 138 A, 139 E, 140 A

Otevřené úlohy

Úloha 141

5.4

Kulturista si vytvořil tento týdenní cvičební režim: Ve druhém až pátém dni vždy $\frac{3}{2}$ -krát zvětšil dávku kliků oproti předchozímu dni a v šestém a sedmém dni zvětšil dávku kliků $\frac{4}{3}$ -krát oproti předchozímu dni. Celkem za 7 dní provedl 2315 kliků. Jaká byla dávka kliků první den?

str. 81

Úloha 142

5.2

Je dána posloupnost $\left(\frac{60 + 11n - 3n^2}{n + 3} \right)_{n=1}^{\infty}$.

- Dokažte, že tato posloupnost je aritmetická.
- Napište vzorec pro součet s_n prvních n členů této posloupnosti.
- Určete n , pro které je s_n maximální, a maximální hodnotu s_n vypočítejte.

str. 81

Úloha 143

5.3

Součet prvních čtyř členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je 80 a platí $a_4 = 9a_2$. Určete první člen a_1 a kvocient q této posloupnosti.

str. 82

Úloha 144

5.2

Číselné hodnoty (v cm) délek stran pravoúhlého trojúhelníku s obsahem 384 cm^2 tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete poloměr kružnice opsané tomuto trojúhelníku.

str. 83

Úloha 145

5.3

Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána svým prvním členem $a_1 = 10$ a kvocientem $q = 2$. Pro všechny členy posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ platí rovnost $b_n = \log a_n$.

- Dokažte, že posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.
- Vypočítejte součet prvních deseti členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Kolik členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ leží v intervalu $\langle 21, 26 \rangle$?

str. 83

Úloha 146

5.1

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně takto:

$$a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 a_n, \quad a_1 = 1$$

- Odhadněte a dokažte vzorec vyjadřující n -tý člen a_n v závislosti na n .
- Rozhodněte, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.
- Rozhodněte, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená.

str. 84

6 PLANIMETRIE

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 147

6.3

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami délek a, c , $a > c$, a výškou v . Rozdíl obsahů lichoběžníků, na něž lichoběžník $ABCD$ rozděluje jeho střední příčka, je:

A/ $\frac{1}{2}(2a + c)v$

B/ $\frac{1}{2}(a + c)v$

C/ $\frac{1}{2}(a - c)v$

D/ $\frac{1}{4}(a + c)v$

E/ $\frac{1}{4}(a - c)v$

Úloha 148

6.3

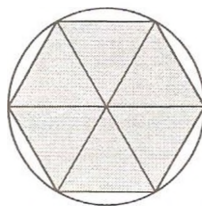
Zahradník má kruhovou zahradu s trávěním tvaru pravidelného šestiúhelníku (viz obrázek). Obsah zatravněné plochy je $\sqrt{108} \text{ m}^2$. Průměr zahrady je:

A/ $\sqrt{3} \text{ m}$

B/ 2 m

C/ $2\sqrt{3} \text{ m}$

D/ 4 m



Úloha 149

6.2

Veslař vesluje po proudu pod úhlem 60° k toku řeky. Jeho rychlost v klidné vodě by byla 2 m/s , rychlost proudu je 3 m/s . Loď se pohybuje rychlostí přibližně:

A/ $3,82 \text{ m/s}$

B/ $4,20 \text{ m/s}$

C/ $4,36 \text{ m/s}$

D/ $4,64 \text{ m/s}$

E/ $5,12 \text{ m/s}$

Úloha 150

6.5

Obrazem čtyřúhelníku $ABCD$ v osově souměrnosti, jejíž osou je přímka BC , je čtyřúhelník $A'B'C'D'$. Obrazem čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ ve středové souměrnosti, jejímž středem je střed úsečky BC , je čtyřúhelník $A''B''C''D''$. Čtyřúhelník $A''B''C''D''$ je obrazem čtyřúhelníku $ABCD$:

A/ v otočení se středem B a úhlem otočení 180°

B/ ve středové souměrnosti se středem C

C/ v osově souměrnosti, jejíž osou je osa úsečky BC

D/ v osově souměrnosti, jejíž osou je přímka DD'

E/ v posunutí určeném vektorem $\frac{1}{2}(B - C)$

Úloha 151

6.3

Obdélník $ABCD$ má úhlopříčku délky 6 cm a odchylku úhlopříček 60° . Obsah obdélníku $ABCD$ je:

A/ 27 cm^2

B/ $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

C/ $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$

D/ $\frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2$

E/ 18 cm^2

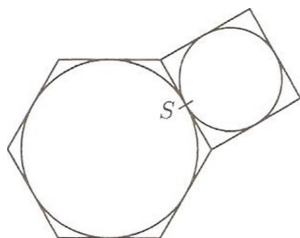
Řešení: 147E, 148D, 149C, 150C, 151B

Úloha 152

6.5

K jedné straně pravidelného šestiúhelníku je vně připsán čtverec podle obrázku. Kružnice vepsané oběma útvarům jsou stejnohlé ve stejnohllosti se středem S . Absolutní hodnota koeficientu této stejnohllosti je:

- A/ $\frac{3}{2}$ B/ $\frac{4}{3}$ C/ $\sqrt{2}$
D/ $\sqrt{3}$ E/ $2\sqrt{2}$



Úloha 153

6.2

V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnou délky 5 cm a přeponou délky 10 cm je délka nejkratší těžnice:

- A/ menší než 5 cm B/ rovná 5 cm
C/ rovná 10 cm D/ větší než 10 cm
E/ větší než 5 cm a menší než 10 cm

Úloha 154

6.2

V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| = 16$ cm a $|BC| = 12$ cm. Na úhlopříčce AC jsou zvoleny body E a F tak, že přímky BE a DF jsou kolmé k přímce AC . Délka úsečky EF je:

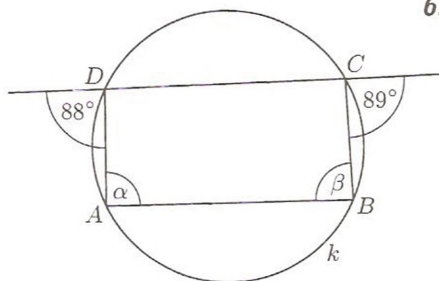
- A/ 5 cm B/ 5,2 cm C/ 5,25 cm D/ 5,4 cm E/ 5,6 cm

Úloha 155

6.3

Pro vnitřní úhly čtyřúhelníku $ABCD$ z obrázku, jehož vrcholy leží na kružnici k , platí:

- A/ $\alpha = 89^\circ$, $\beta = 88^\circ$
B/ $\alpha = 88^\circ$, $\beta = 91^\circ$
C/ $\alpha = 89^\circ$, $\beta = 92^\circ$
D/ $\alpha = 92^\circ$, $\beta = 88^\circ$
E/ $\alpha = 88^\circ$, $\beta = 89^\circ$



Úloha 156

6.1

V rovině jsou dány dva různé body A a B , jejichž vzdálenost je d . V jedné polovině s hraniční přímkou AB uvažujeme množinu M všech bodů X , pro které má úhel AXB danou velikost ω , přičemž $0^\circ < \omega < 90^\circ$. Největší vzdálenost dvou bodů z množiny M je rovna:

- A/ $\frac{d}{2 \cos \frac{1}{2} \omega}$ B/ $\frac{d}{2 \sin \omega}$ C/ $\frac{d}{\cos \frac{1}{2} \omega}$ D/ $\frac{d}{\sin \omega}$ E/ $\frac{d}{\sin 2\omega}$

Řešení: 152D, 153B, 154E, 155A, 156D

Úloha 157**6.2****ŘEŠENÍ**

Při opakování planimetrie vyslovili studenti tato tvrzení:

- (1) Existuje trojúhelník, jehož střed kružnice vepsané a střed kružnice opsané jsou totožné.
- (2) Existuje trojúhelník, jehož střed kružnice opsané leží na některé z jeho stran.
- (3) Existuje trojúhelník, jehož střed kružnice vepsané leží na některé z jeho stran.
- (4) Existuje trojúhelník, jehož průsečík výšek leží na některé z jeho stran.
- (5) Existuje trojúhelník, jehož střed kružnice opsané a průsečík výšek leží vně tohoto trojúhelníku.
- (6) Existuje trojúhelník, jehož střed kružnice vepsané, střed kružnice opsané a průsečík výšek jsou totožné.
- (7) Existuje trojúhelník, jehož těžiště leží vně tohoto trojúhelníku.

Mezi nimi nejsou pravdivá právě tato tvrzení:

- | | | |
|--------------|-------------------|--------------|
| A/ (2) a (7) | B/ (1), (4) a (6) | C/ (1) a (4) |
| D/ (3) a (7) | E/ (3), (5) a (7) | |

Úloha 158**6.3**

Jestliže číselné hodnoty délek všech stran pětiúhelníku $ABCDE$ vyjádřených v centimetrech jsou celá čísla a $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|CD| = 8$ cm, $|DE| = 7$ cm, potom největší možná délka strany AE je:

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| A/ 16 cm | B/ 22 cm | C/ 26 cm | D/ 28 cm | E/ 30 cm |
|----------|----------|----------|----------|----------|

Úloha 159**6.4**

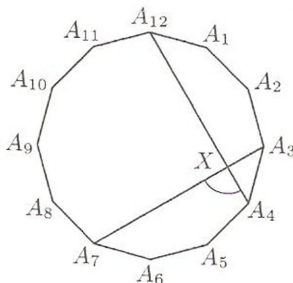
Kružnici je vepsán čtyřúhelník tak, že jeho vrcholy dělí kružnici na kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru $2 : 3 : 3 : 4$. Velikosti vnitřních úhlů tohoto čtyřúhelníku jsou:

- | | |
|--|--|
| A/ $40^\circ, 100^\circ, 100^\circ, 120^\circ$ | B/ $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ |
| C/ $70^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 110^\circ$ | D/ $75^\circ, 80^\circ, 80^\circ, 125^\circ$ |
| E/ $75^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 105^\circ$ | |

Úloha 160**6.3**

Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2 \dots A_{12}$. Bod X je průsečíkem jeho úhlopříček A_3A_7 a A_4A_{12} (viz obrázek). Velikost úhlu A_4XA_7 je:

- | | | |
|---------------|----------------|---------------|
| A/ 80° | B/ 85° | C/ 90° |
| D/ 95° | E/ 100° | |

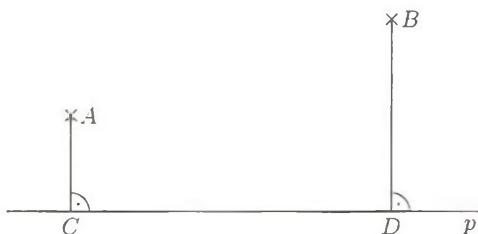


Řešení: 157D, 158D, 159E, 160C

Úloha 161

6.1

V rovině je dána přímka p a body A, B , jejichž poloha vzhledem k přímce p je dána obrázkem.



Body C, D jsou paty kolmic sestrojených z bodů A, B k přímce p . Bod E ležící na přímce p takový, že délka lomené čáry AEB je co nejmenší, je průsečíkem přímky p a:

A/ osy úsečky CD

B/ osy úsečky AB

C/ úsečky $A'B$, kde A' je obraz bodu A v osově souměrnosti s osou p

D/ Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem AB

E/ kružnice se středem v bodě A a poloměrem $r = \frac{1}{2}|AB|$

Úloha 162

6.2

V trojúhelníku se stranami délek 2 cm, $\sqrt{3}$ cm a $\sqrt{7}$ cm je sinus nejmenšího vnitřního úhlu roven:

A/ $\frac{2}{\sqrt{7}}$

B/ $\sqrt{\frac{11}{12}}$

C/ $\frac{3}{\sqrt{7}}$

D/ $\sqrt{\frac{3}{7}}$

E/ $\frac{\sqrt{143}}{12}$

Úloha 163

6.3

Nad stranami čtverce $ABCD$ jsou vně tohoto čtverce sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABK, BCL, CDM, DAN (viz obrázek). Má-li strana čtverce $ABCD$ délku a , má strana čtverce $KLMN$ délku:

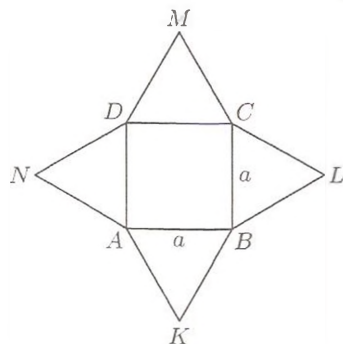
A/ $2a \sin 75^\circ$

B/ $2a \cos 75^\circ$

C/ $a \sin 60^\circ$

D/ $2\sqrt{2}a \sin 15^\circ$

E/ $2\sqrt{2}a \cos 15^\circ$



Řešení: 161 C, 162 D, 163 A

Otevřené úlohy

ŘEŠENÍ

Úloha 164

6.5

Je dán čtverec $ABCD$ se stranou délky a . Čtverec $AB'C'D'$ je jeho obrazem v otočení o úhel 45° kolem bodu A . Určete obsah průniku čtverců $ABCD$ a $AB'C'D'$.

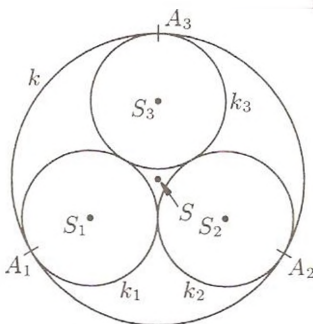
str. 84

Úloha 165

6.4

Každé dvě ze tří shodných kružnic $k_1(S_1; r)$, $k_2(S_2; r)$, $k_3(S_3; r)$ se vně dotýkají a kružnice $k(S; R)$ opsaná těmto kružnicím se jich dotýká v bodech A_1 , A_2 , A_3 (viz obrázek).

- Dokažte, že poloměr R kružnice k je roven $\frac{1}{3}(2\sqrt{3} + 3)r$.
- Vypočítejte délku strany rovnostranného trojúhelníku $A_1A_2A_3$.



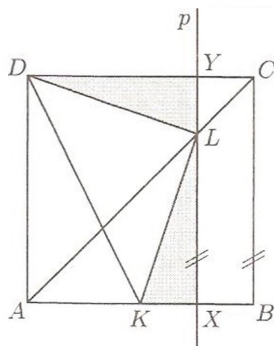
str. 85

Úloha 166

6.5

Na úhlopříčce AC čtverce $ABCD$ je dán bod L tak, že platí $|AL| : |LC| = 3 : 1$. Bod K je střed strany AB . Přímka p , která je rovnoběžná se stranou BC a prochází bodem L , protíná stranu AB v bodě X a stranu CD v bodě Y (viz obrázek).

- Dokažte, že trojúhelníky KLX a LDY jsou shodné.
- Dokažte, že úhel KLD je pravý.
- Vypočítejte velikost úhlu KDL .

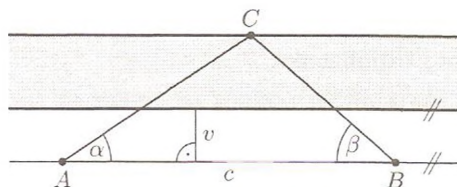


str. 86

Úloha 167

6.2

Ve vzdálenosti $v = 10\text{m}$ od břehu řeky byly vytyčeny body A , B , $|AB| = c = 63\text{m}$. Bod C je na protějším břehu. Byly změřeny velikosti úhlů $|\angle CAB| = \alpha = 33^\circ 50'$, $|\angle CBA| = \beta = 41^\circ 20'$ (viz obrázek).



Vypočítejte šířku řeky s přesností na desetiny metru.

str. 86

Úloha 168

6.3

Dokažte, že osy vnitřních úhlů rovnoběžníku $ABCD$ ohraničují pravoúhelník. Vypočítejte obsah tohoto pravoúhelníku, jestliže $|AB| = 12$ cm, $|AD| = 6$ cm a $|\angle BAD| = 60^\circ$.

Úloha 169

6.2

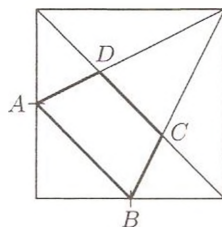
Pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C je dán poloměrem R kružnice opsané a obsahem S .

- Sestrojte trojúhelník ABC , je-li $R = 3$ cm, $S = 6$ cm².
- Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k R , S .
- Jaký vztah musí splňovat S a R , aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný?

Úloha 170

6.3

Je dán čtverec se stranou délky 8 cm. Body A a B jsou středy jeho sousedních stran, body C a D leží na jeho úhlopříčce. Určete obsah lichoběžníku $ABCD$ z obrázku.

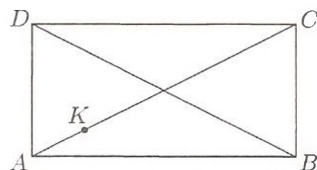
**Úloha 171**

6.5

Kulečnickový stůl má rozměry 200 cm $\times$ 100 cm. Na úhlopříčce stolu ve vzdálenosti 20 cm od jeho delší hrany je umístěna kulečnicková koule K (viz obrázek).

Hráč má pomocí odrazu od hrany stolu AB a odrazu od hrany stolu BC odehrát kouli do otvoru D .

V měřítku 1 : 40 zobrazte dráhu koule a vypočítejte délku této dráhy. Rozměry koule i rozměry otvoru zanedbejte, kouli i otvor považujte za body.

**Úloha 172**

6.2

V trojúhelníku ABC platí $a = 13$ cm, $b = 10$ cm a $v_a = 6$ cm. Vypočítejte délku strany c tohoto trojúhelníku.

Úloha 173

6.4

Společná tětiva dvou kružnic určuje v jedné kružnici středový úhel o velikosti 60° a v druhé kružnici středový úhel o velikosti 90° . Vzdálenost středů kružnic je 10 cm. Vypočítejte poloměry obou kružnic.

7 STEREOMETRIE

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 174

7.3

Délky hran kvádru jsou v postupném poměru 2 : 3 : 4 a jeho objem je 192 cm^3 . Povrch kvádru je:

- A/ 52 cm^2 B/ 104 cm^2 C/ 156 cm^2 D/ 208 cm^2 E/ 260 cm^2

Úloha 175

7.2

V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky 1 dm je vzdálenost přímek AE a BH rovna:

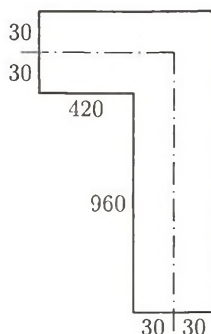
- A/ 0,5 dm B/ 1 dm C/ $\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ dm}$ D/ $\frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ dm}$ E/ $\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ dm}$

Úloha 176

7.3

Uzavřená část válcového potrubí s průměrem 60 cm a s ohybem podle obrázku se zkouší tlakovou zkouškou. Číselné hodnoty vnitřních rozměrů potrubí v centimetrech jsou uvedeny na obrázku. Objem plynu potřebného k tlakové zkoušce, který je dvojnásobkem objemu zkoušeného potrubí, je přibližně:

- A/ 7831 litrů
B/ 8002 litrů
C/ 8143 litrů
D/ 9028 litrů
E/ 9887 litrů



Úloha 177

7.3

Pravidelný trojboký hranol má všechny hrany shodné. Jestliže obsah pláště hranolu je 48 m^2 , je jeho povrch:

- A/ $30\sqrt{5} \text{ m}^2$ B/ $8(6 + \sqrt{3}) \text{ m}^2$
C/ 65 m^2 D/ $9(5 + \sqrt{2}) \text{ m}^2$

Úloha 178

7.3

Do každého rohu krychle je vložena koule. Všechny koule jsou shodné, každá z nich se dotýká tří těchto koulí a tří stěn krychle. Poměr součtu objemů všech osmi koulí a objemu krychle je:

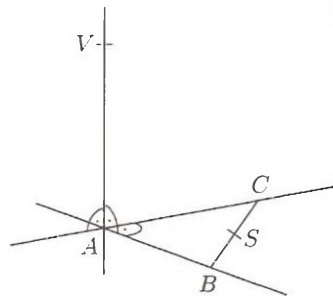
- A/ $\pi : 4$ B/ $\pi : 6$ C/ $\pi : 8$
D/ $3\pi : 16$ E/ $3\pi : 32$

Řešení: 174D, 175C, 176C, 177B, 178B

Úloha 179

Přímky AB a AC jsou navzájem kolmé, přímka AV je kolmá k rovině ABC , $|AB| = |AC| = |AV|$ a bod S je středem úsečky BC (viz obrázek). Velikost úhlu ASV je přibližně:

- A/ 61° B/ 58° C/ 55°
D/ 52° E/ 48°

**Úloha 180**

7.3

Kulička je vyrobená z pórovitého materiálu. Stlačením z ní lze vyrobit kuličku, která má poloviční průměr. Hustota materiálu se při tom:

- A/ nezmění B/ jeden a půlkrát zvětší
C/ dvakrát zvětší D/ čtyřikrát zvětší
E/ osmkrát zvětší

Úloha 181

7.3

Poměr povrchů krychle a válce, jehož podstavy jsou kruhy vepsané protilehlým stěnám krychle, je:

- A/ $4 : \pi$ B/ $3\sqrt{3} : \pi$ C/ $6 : \pi$
D/ $12 : (1 + \sqrt{2})\pi$ E/ $5\sqrt{2} : 2\pi$

Úloha 182

7.3

Ledová kra má tvar kváдру a nad hladinou vidíme její část (rovněž tvaru kváдру) o výšce 4 cm. Podle Archimedova zákona je hmotnost tělesem vytlačené vody rovna hmotnosti celého tělesa. Je-li hustota ledu $0,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a hustota vody $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, je výška ledové kry:

- A/ 32 cm B/ 46 cm C/ 48 cm D/ 50 cm E/ 52 cm

Úloha 183

7.3

Tělesová úhlopříčka pravidelného čtyřbokého hranolu má délku 10 cm a svírá s rovinou podstavy úhel velikosti 45° . Objem hranolu je:

- A/ $\frac{1000}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$ B/ $\frac{500}{3}\sqrt{2} \text{ cm}^3$ C/ $\frac{500}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$
D/ $200\sqrt{2} \text{ cm}^3$ E/ $125\sqrt{2} \text{ cm}^3$

Úloha 184

7.2

Je dán obdélník $ABCD$ ležící v rovině ϱ a bod M takový, že přímka AM je k rovině ϱ kolmá. Platí $|MB| = 6 \text{ cm}$, $|MC| = 9 \text{ cm}$, $|MD| = 7 \text{ cm}$. Délka úsečky MA je:

- A/ 1 cm B/ 2 cm C/ 3 cm D/ 4 cm E/ 5 cm

Řešení: 179C, 180E, 181A, 182D, 183E, 184B

Úloha 185**7.1****ŘEŠENÍ**

Jsou dána čtyři tvrzení:

- (1) V krychli existují aspoň dvě mimoběžné tělesové úhlopříčky.
- (2) V krychli existují aspoň dvě navzájem kolmé tělesové úhlopříčky.
- (3) V krychli existují aspoň dvě stěnové úhlopříčky, jejichž odchylka je 60° .
- (4) V krychli existují aspoň tři navzájem různé rovnoběžné stěnové úhlopříčky.

Z těchto tvrzení:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| A/ není pravdivé žádné | B/ je pravdivé právě jedno |
| C/ jsou pravdivá právě dvě | D/ jsou pravdivá právě tři |
| E/ jsou pravdivá všechna | |

Úloha 186**7.3**

Jestliže každou hranu kvádra s objemem V_0 a povrchem S_0 zkrátíme o 20 % její délky, dostaneme kvádr s objemem V a povrchem S , kde:

- | | |
|---|---|
| A/ $V = \frac{4}{5}V_0$, $S = \frac{4}{5}S_0$ | B/ $V = \frac{16}{25}V_0$, $S = \frac{4}{5}S_0$ |
| C/ $V = \frac{16}{25}V_0$, $S = \frac{16}{25}S_0$ | D/ $V = \frac{16}{25}V_0$, $S = \frac{64}{125}S_0$ |
| E/ $V = \frac{64}{125}V_0$, $S = \frac{16}{25}S_0$ | |

Úloha 187**7.3**

Krychli s hranou délky a je vepsán čtyřboký jehlan, jehož podstavou je jedna stěna krychle a hlavním vrcholem střed protější stěny. Povrch jehlanu je:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| A/ $(1 + \sqrt{2})a^2$ | B/ $(1 + \sqrt{3})a^2$ | C/ $(1 + \sqrt{5})a^2$ |
| D/ $4\sqrt{2}a^2$ | E/ $5\sqrt{3}a^2$ | |

Úloha 188**7.3**

Obyvatelé Měsíce mají jednotku délky nazvanou „lunar“. Počet čtverečných „lunarů“, které udávají povrch Měsíce, je stejný jako počet krychlových „lunarů“, které udávají objem Měsíce. Je-li průměr Měsíce 3474 km, představuje „lunar“:

- | | | | | |
|---------|----------|-----------|-----------|-------------|
| A/ 8 km | B/ 35 km | C/ 198 km | D/ 579 km | E/ 1 158 km |
|---------|----------|-----------|-----------|-------------|

Úloha 189**7.3**

Násypka přesýpacích hodin má tvar rotačního kuželu, jehož výška $v = 5$ cm je rovna poloměru horního okraje násypky. Objem písku v přesýpacích hodinách je roven čtyřem pětinaám objemu násypky. Předpokládejme, že „hladina“ písku v násypce je stále vodorovná. V okamžiku, kdy se z násypky přesype polovina písku, bude jeho „hladina“ nad otvorem násypky přibližně ve výšce:

- | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| A/ 3,46 cm | B/ 3,68 cm | C/ 3,78 cm | D/ 3,98 cm | E/ 4,12 cm |
|------------|------------|------------|------------|------------|

Řešení: 185B, 186E, 187C, 188D, 189B

Úloha 190

7.2

V krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a je S střed stěny $ABCD$. Vzdálenost bodu C od přímky SG je:

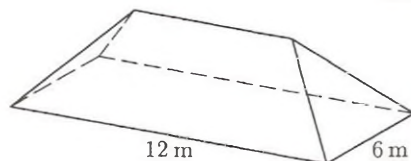
$$A/ \frac{3}{2}a \quad B/ \frac{1}{2}\sqrt{2}a \quad C/ \frac{1}{2}\sqrt{3}a \quad D/ \frac{1}{3}\sqrt{3}a \quad E/ \frac{1}{4}\sqrt{6}a$$

Otevřené úlohy

Úloha 191

7.3

Střešní půda má obdélníkový půdorys o rozměrech 12 m a 6 m. Valbová střecha (viz obrázek) má sklon všech střešních rovin 45° . Vypočítejte objem půdního prostoru.

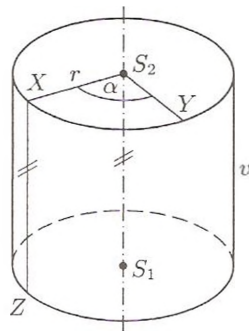


str. 92

Úloha 192

7.2

Je dán rotační válec s poloměrem r a výškou v . Bod S_1 je střed jeho dolní podstavy a bod S_2 střed jeho horní podstavy. Body X, Y leží na kružnici ohraničující horní podstavu a bod Z na kružnici ohraničující dolní podstavu, přičemž $\angle XS_2Y = \alpha$ a přímky XZ a S_1S_2 jsou rovnoběžné (viz obrázek). Vypočítejte tangens odchylky přímek YZ a S_1S_2 .



str. 93

Úloha 193

7.2

Poloroviny α, β se společnou hraniční přímkou p svírají úhel velikosti 60° . Bod X leží v polorovině α a bod Y v polorovině β , žádný z nich neleží na přímce p . Paty kolmic sestrojených z bodů X, Y k přímce p jsou označeny X', Y' . Platí $|XX'| = 5$ cm, $|YY'| = 7$ cm, $|X'Y'| = 19$ cm. Vypočítejte délku úsečky XY .

str. 93

Úloha 194

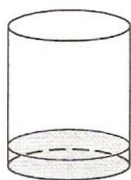
7.3

Pro pravidelný čtyřboký komolý jehlan $ABCDEFGH$ s podstavami $ABCD$ a $EFGH$ platí $|AB| = a = 16$ cm, $|EF| = b = 3$ cm, $\angle EAB = 60^\circ$. Vypočítejte jeho objem.

str. 94

Úloha 195**7.3****ŘEŠENÍ**

Jindra se rozhodl, že změří vydatnost očekávaného lijáku. Na vodorovnou podložku na zahradě postavil dvě prázdné nádoby: kádinku tvaru rotačního válce s poloměrem podstavy R_0 a výškou v_0 a odměrku tvaru rotačního kuželu s poloměrem podstavy R_1 a výškou v_1 (viz obrázek).



Při lijáku žádná z nádob nepřetekla, v kádince se vodní hladina ustálila ve výšce h_0 ode dna. Určete, v jaké výšce h_1 se ustálila hladina vody v odměrce.

str. 94

Úloha 196**7.3**

Horkovzdušný balón se vznáší ve výšce $h = 2$ km nad povrchem Země. Poloměr Země je $R_Z = 6378$ km.

- Z jaké maximální vzdálenosti od balónu je možné balón z povrchu Země pozorovat?
- Kolik čtverečných kilometrů zemského povrchu je z balónu vidět?

str. 95

Úloha 197**7.1**

Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s hlavním vrcholem V o délce podstavné hrany $a = 4,5$ cm a výšce $v = 5,5$ cm. Dále zobrazte střed K hrany AV , střed M hrany CV a bod L ležící na polopřímce CB tak, že bod B je středem úsečky CL .

- Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM .
- Vypočítejte odchylku roviny KLM od roviny podstavy daného jehlanu.

str. 96

Úloha 198**7.3**

Je dán pravidelný čtyřstěn o hraně délky a . Vrcholem D prochází rovina α kolmá k rovině ABC a rovnoběžná s přímkou AB , která z čtyřstěnu $ABCD$ odděluje čtyřstěn $XYCD$, kde $X \in AC$, $Y \in BC$.

- Vypočítejte obsah řezu čtyřstěnu $ABCD$ rovinou α .
- Vypočítejte poměr objemů čtyřstěnů $XYCD$ a $ABCD$.

str. 97

Úloha 199

7.3

Do koule je vepsán rovnostranný válec, tj. válec, jehož osovým řezem je čtverec, a rovnostranný kužel, tj. kužel, jehož osovým řezem je rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že pro povrch S_1 koule, povrch S_2 válce a povrch S_3 kuželu platí $S_2 = \sqrt{S_1 S_3}$.

str. 97

Úloha 200

7.3

Do kuželu s poloměrem podstavy r , jehož osovým řezem je rovnostranný trojúhelník, je vepsána krychle $ABCDEFGH$ tak, že její vrcholy A, B, C, D leží v podstavě kuželu a vrcholy E, F, G, H na jeho plášti. Vypočtěte délku hrany krychle.

str. 98

8 ANALYTICKÁ GEOMETRIE

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 201

8.2

Přímka, která je kolmá k přímce $3x - 2y - 6 = 0$, má směrnici:

A/ $-\frac{3}{2}$

B/ $-\frac{2}{3}$

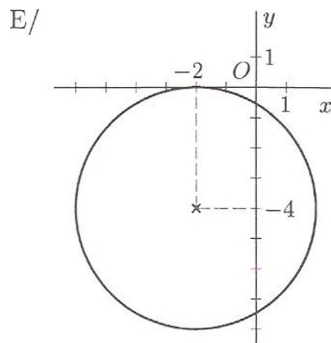
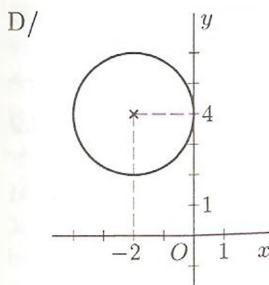
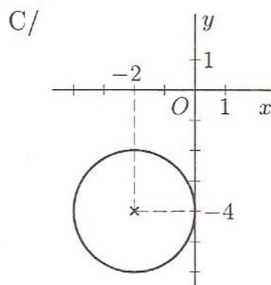
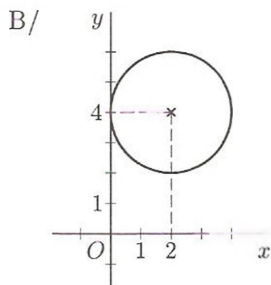
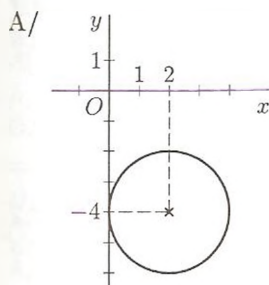
C/ $\frac{2}{3}$

D/ $\frac{3}{2}$

Úloha 202

8.3

Kružnice $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0$ je na obrázku:



Úloha 203

8.2

Přímky $ax + 6y + b = 0$ a $2x + ay - b = 0$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když pro parametry a, b platí:

A/ $a \in \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$, $b \in \mathbb{R}$

B/ $a \in \{-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$, $b = 0$

C/ $a \in \{-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\}$, $b \in \mathbb{R}$

D/ $a \in \{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$, $b = 0$

E/ $a \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$, $b \in \mathbb{R}$

Řešení: 201B, 202C, 203E

Úloha 204

8.3

Přímka $x - y + m = 0$ je sečnou kružnice $x^2 + y^2 - 8y = 0$ právě tehdy, když:

A/ $m \in (4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$

B/ $m \in (-4, 4)$

C/ $m \in (0, 8)$

D/ $m \in (4 - 4\sqrt{2}, 4 + 4\sqrt{2})$

E/ $m \in \langle 0, 8 \rangle$

Úloha 205

8.3

Obsah kruhu vepsaného čtverci, který má střed $S[1, 2]$ a jeden vrchol $A[5, -1]$, je:

A/ $\frac{27}{2}\pi$

B/ $\frac{25}{2}\pi$

C/ 25π

D/ 12π

E/ 15π

Úloha 206

8.1

Jsou dány vektory $u = (5, -3)$ a $v = (1, m)$. Délka vektoru $u - v$ je rovna 5 právě tehdy, když:

A/ $m \in \{1, 4\}$

B/ $m \in \{0, 1\}$

C/ $m \in \{-6, 0\}$

D/ $m \in \{0, 4\}$

E/ $m \in \{-6, 1\}$

Úloha 207

8.2

Pás je ohraničený přímkami $3x - 4y = 0$ a $3x - 4y + 4 = 0$. Osa tohoto pásu má parametrické vyjádření:

A/ $x = 4 - 4t, y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}$

B/ $x = 4 + 3t, y = 8 + 4t, t \in \mathbb{R}$

C/ $x = 5 + 4t, y = -3t, t \in \mathbb{R}$

D/ $x = -8 - 3t, y = -1 + 4t, t \in \mathbb{R}$

E/ $x = 2 + 4t, y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}$

Úloha 208

8.2

Přímka $p: x = 1 + 4t, y = -2 + 3t, z = t, t \in \mathbb{R}$, je rovnoběžná s rovinou $\alpha: ax + 3y - 5z + 281 = 0$ právě tehdy, když:

A/ $a = -3$

B/ $a = -1$

C/ $a = 1$

D/ $a = 2$

E/ $a \notin \{-3, -1, 1, 2\}$

Úloha 209

8.2

Je dán trojúhelník ABC s vrcholy $A[1, -1]$, $B[4, 2]$, $C[2, -6]$. Rovnice těžnice t_a je:

A/ $x - y - 2 = 0$

B/ $2x - y - 3 = 0$

C/ $4x - 4y - 5 = 0$

D/ $4x + y - 3 = 0$

E/ $x + 2y + 1 = 0$

Úloha 210

8.2

Kolmým průmětem bodu $A[3, 2, 1]$ do roviny $x + y + 2z + 5 = 0$ je bod:

A/ $B[-5, 2, -1]$

B/ $B[0, -3, -1]$

C/ $B[1, 0, -3]$

D/ $B[0, 1, -3]$

E/ $B[1, -2, -2]$

Řešení: 204D, 205B, 206C, 207E, 208B, 209E, 210C

Úloha 211

8.2

V rovině jsou dány body $A[-1, 1]$ a $B[-5, 2]$. Souřadnice x, y libovolného bodu $C[x, y]$, který je různý od bodů A, B a je vrcholem pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB , splňují rovnici:

$$A/ x^2 + y^2 - 6x - 3y - 5 = 0$$

$$B/ x^2 + y^2 - 3x - 6y + 1 = 0$$

$$C/ x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

$$D/ x^2 + y^2 + 6x - 3y + 7 = 0$$

$$E/ x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$$

Úloha 212

8.3

Vzdálenost bodu $M[3, 4]$ od středu elipsy $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y - 31 = 0$ je:

$$A/ 4\sqrt{3}$$

$$B/ 2\sqrt{10}$$

$$C/ 3\sqrt{5}$$

$$D/ 6$$

$$E/ 8$$

Úloha 213

8.2

Rovina $3x + y + z + c = 0$ má neprázdný průnik s úsečkou AB , kde $A[1, 0, 2]$, $B[0, 1, 5]$, právě tehdy, když:

$$A/ c \in \langle 2, 5 \rangle$$

$$B/ c \in \langle 5, 6 \rangle$$

$$C/ c \in \langle -5, -2 \rangle$$

$$D/ c \in \langle -6, -5 \rangle$$

$$E/ c \in \langle -6, -2 \rangle$$

Úloha 214

8.2

Obrazem bodu $A[-1, 6]$ v osové souměrnosti s osou $x - 2y + 3 = 0$ je bod:

$$A/ B[1, -6]$$

$$B/ B[-2, 3]$$

$$C/ B[1, 2]$$

$$D/ B[3, -2]$$

$$E/ B[-1, -6]$$

Úloha 215

8.3

Vrcholem V a ohniskem F paraboly $y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ jsou body:

$$A/ V[0, 2], F[3, -2]$$

$$B/ V[0, \frac{1}{2}], F[\frac{3}{2}, 2]$$

$$C/ V[0, -2], F[\frac{3}{2}, -2]$$

$$D/ V[0, 1], F[2, 1]$$

$$E/ V[0, -2], F[3, -2]$$

Úloha 216

8.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde $A[0, 0, 0]$, $B[1, 0, 0]$, $D[0, 1, 0]$, $E[0, 0, 1]$, bod S je střed její stěny $EFGH$. Odchylka vektorů $u = F - C$ a $v = S - C$:

$$A/ \text{je } 30^\circ$$

$$B/ \text{je } 37,5^\circ$$

$$C/ \text{je } 45^\circ$$

$$D/ \text{je } 60^\circ$$

$$E/ \text{není rovna žádné z hodnot uvedených v A/ až D/}$$

Úloha 217

8.2

Výška v_c trojúhelníku ABC , kde $A[1, 2]$, $B[3, 5]$, $C[3, -8]$, je rovna:

$$A/ \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$B/ \frac{2}{13}\sqrt{13}$$

$$C/ 2\sqrt{13}$$

$$D/ \sqrt{13}$$

$$E/ \sqrt{26}$$

Úloha 218

8.3

Množina bodů daná rovnicí $2a(y + 2) = (x - 3)^2$ je parabola a přímka $x + y + 2 = 0$ je její tečna právě tehdy, když:

$$A/ a = -6$$

$$B/ a \in \{0, 6\}$$

$$C/ a = 6$$

$$D/ a = 16$$

$$E/ a = \frac{1}{6}$$

Řešení: 211D, 212B, 213D, 214D, 215C, 216A, 217C, 218C

Úloha 219

8.3

Kružnice, které se dotýkají přímkou $x = 18$ a $x = -8$ a procházejí počátkem soustavy souřadnic, jsou:

A/ $(x-5)^2 + (y-13)^2 = 194$ a $(x+5)^2 + (y+13)^2 = 194$

B/ $(x-5)^2 + (y-13)^2 = 194$ a $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$

C/ $(x+5)^2 + (y+12)^2 = 169$ a $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 169$

D/ $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$ a $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 169$

E/ $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$ a $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 169$

Úloha 220

8.3

Množinou všech bodů, pro které platí, že součet jejich vzdáleností od bodů $M[-3, 0]$ a $N[3, 0]$ je 10, je křivka:

A/ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

B/ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

C/ $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

D/ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

E/ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Úloha 221

8.2

Pro rovnoramenný trojúhelník ABC platí, že bod $S[1, -3]$ je středem jeho základny AB , vrchol C leží na ose x a $A[-2, 0]$. Vrcholy B, C jsou body:

A/ $B[4, -6], C[-4, 0]$ B/ $B[4, -6], C[4, 0]$ C/ $B[0, 3], C[4, 0]$

D/ $B[-4, 3], C[8, 0]$ E/ $B[4, 3], C[-8, 0]$

Úloha 222

8.2

Pro vzdálenost v bodu $A[1, 0, -2]$ od přímky $p = \{[6+3t, -1, 3+t]; t \in \mathbb{R}\}$ platí:

A/ $v = 0$

B/ $v \in (0, 1)$

C/ $v \in (1, 2)$

D/ $v \in (2, 3)$

E/ $v \in (3, \infty)$

Otevřené úlohy

Úloha 223

8.3

Pravoúhelník, který má strany rovnoběžné s osami souřadnic a jeho vrcholy leží na kružnici $k: x^2 + y^2 = 26$, má obsah 48. Určete souřadnice vrcholů.

str. 99

Úloha 224

8.1

Je dán rovnoběžník $ABCD$, bod X je střed jeho strany BC , bod Y je průsečík úseček AC a XD . Vyjádřete vektor $\mathbf{x} = Y - X$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a} = B - A$ a $\mathbf{b} = C - A$.

str. 100

Řešení: 219E, 220E, 221B, 222E

Úloha 225**8.2****ŘEŠENÍ**

Zapište parametrický systém rovnic všech přímek, které procházejí bodem $P[3, -5]$ a mají alespoň jeden společný bod s úsečkou AB , kde $A[-7, 0]$, $B[1, 1]$. Za parametr zvolte směrnici příslušné přímky a určete množinu všech hodnot, kterých parametr nabývá.

str. 100

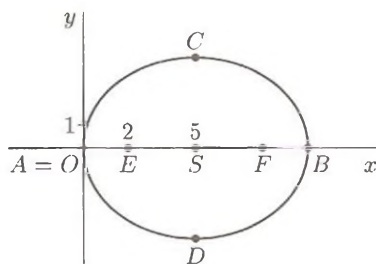
Úloha 226**8.2**

Na přímce $p: x = 4 + t, y = 3 + 2t, z = -2 - t, t \in \mathbb{R}$, určete bod C , který má stejnou vzdálenost od bodů $A[1, 2, 5]$ a $B[-1, 0, 1]$. Vypočtete tuto vzdálenost.

str. 101

Úloha 227**8.3**

Elipsa z obrázku má střed $S[5, 0]$, hlavní vrcholy $A[0, 0]$, B a ohniska $E[2, 0]$, F .



- Určete souřadnice hlavního vrcholu B , ohniska F a vedlejších vrcholů C , D elipsy.
- Napište rovnici elipsy.
- Napište rovnice tečen elipsy rovnoběžných s přímkou AC .

str. 101

Úloha 228**8.3**

Je dána hyperbola $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$.

- Určete její střed, vrcholy, ohniska, asymptoty a danou hyperbolu zakreslete.
- Napište rovnice přímek, které mají s danou hyperbolou společný právě jeden bod $T[5, y_0]$.

str. 102

Úloha 229**8.2**

Určete všechny body, které leží na přímce $p: x - 2y - 4 = 0$ a mají dvakrát větší vzdálenost od bodu $A[0, 0]$ než od bodu $B[6, 0]$.

str. 102

Úloha 230**8.2**

Jsou dány body $A[0, 2, -1]$, $B[1, 1, 1]$, $C[4, 6, 2]$.

- Napište obecnou rovnici roviny α určené body A , B , C .
- Vypočtete souřadnice bodu D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl rovnoběžník.
- Dokažte, že rovnoběžník $ABCD$ z části b) je obdélník, a vypočtete jeho obsah.

str. 103

Úloha 231

8.2

Strana AB kosočtverce $ABCD$ leží na přímce $p_1: x - 7y = 0$, strana CD leží na přímce $p_2: x - 7y + 30 = 0$ a jeho úhlopříčka AC leží na přímce $u_1: 2x + y - 15 = 0$.

- Určete souřadnice vrcholů A, B, C, D .
- Vypočtěte obsah kosočtverce $ABCD$.

str. 104

Úloha 232

8.2

Na obrazovce, na níž je zavedena pravoúhlá soustava souřadnic s jednotkou délky 1 mm na obou osách, jsou v měřítku 1 : 1 000 000 monitorovány dvě lodě v mlze. Obě lodě se pohybují rovnoměrně přímočaře. Na počátku monitorování je obraz první lodě v bodě $A[10, 0]$ a obraz druhé lodě v bodě $B[180, 10]$. Za jednu hodinu se obraz první lodě posune z bodu A do bodu $A'[30, 10]$ a obraz druhé lodě z bodu B do bodu $B'[170, 30]$.

- Dokažte, že nehrozí nebezpečí srážky lodí.
- Určete, za jak dlouho od počátku monitorování se lodě k sobě nejvíce přiblíží, jejich nejmenší vzdálenost vypočtěte.

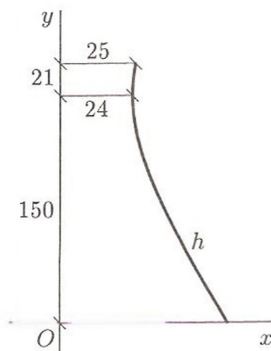
str. 104

Úloha 233

8.3

Chladicí věž elektrárny Temelín má tvar části rotačního jednodílného hyperboloidu, tj. plochy, která vznikne rotací části hyperboly h kolem její vedlejší osy. Věž má výšku 171 m. V této výšce je vnější poloměr pláště věže 25 m. Nejmenší poloměr je 24 m, a to ve výšce 150 m.

- Zvolte soustavu souřadnic podle obrázku a napište rovnici hyperboly h .
- Vypočtěte vnější poloměr pláště věže při zemi.



str. 105

9 KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST, STATISTIKA

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 234

9.1

Pan Novák chodí do práce každodenně v košili s kravatou. Vybírá si náhodně z 12 různých košil a 8 různých kravat s jediným omezením: myslí si, že zelená barva neladí s modrou barvou. Mezi košilemi pana Nováka jsou tři košile modré a dvě košile zelené, mezi jeho kravatami jsou čtyři kravaty modré a jedna kravata zelená. Pan Novák si může košili a kravatu vybrat právě:

A/ 72 způsoby

B/ 85 způsoby

C/ 88 způsoby

D/ 93 způsoby

E/ 96 způsoby

Úloha 235

9.3

Průměrný měsíční plat zaměstnanců firmy VÍTR v prvním až třetím čtvrtletí minulého roku byl 13 600 Kč. Ve čtvrtém čtvrtletí vyplatila firma zaměstnancům mimořádné odměny, a tak jejich průměrný měsíční plat za celý loňský rok činil 14 800 Kč. Průměrná měsíční mzda zaměstnanců firmy VÍTR ve čtvrtém čtvrtletí byla v porovnání s jejich průměrnou měsíční mzdou v prvním až třetím čtvrtletí větší o:

A/ 1 200 Kč

B/ 2 400 Kč

C/ 3 600 Kč

D/ 4 800 Kč

E/ 6 000 Kč

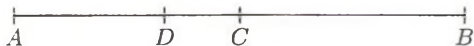
Úloha 236

9.2

Je dána úsečka AB a na ní body C , D tak, že platí

$$|AB| = 2|AC| = 3|AD|$$

(viz obrázek).



Pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod úsečky AB bude ležet mezi body D a C , je:

A/ $\frac{1}{2}$

B/ $\frac{1}{3}$

C/ $\frac{1}{4}$

D/ $\frac{1}{6}$

E/ jiná než $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$

Úloha 237

9.2

Ve fotbalové lize hraje 16 týmů stejné výkonnosti. Trenér Sparty prohlásil: „V příštím ročníku ligy skončíme v první polovině tabulky.“ Pravděpodobnost toho, že trenér má pravdu, je:

A/ $\frac{15!}{16!}$

B/ $\frac{8 \cdot 15!}{16!}$

C/ $\frac{8!}{16!}$

D/ $\frac{\binom{16}{2} \cdot 8!}{16!}$

E/ $\frac{16! - 8!}{16!}$

Řešení: 234B, 235D, 236D, 237B

Úloha 238

9.1

Pěticiferných čísel vytvořených z číslic 2, 3, 4, 5, 6, 7, která jsou dělitelná 75 a žádná číslice se v jejich zápisu neopakuje, je:

- A/ 12 B/ 18 C/ 24 D/ 36 E/ 48

Úloha 239

9.3

Medián čísel x , 3, $4x - 3$, $x + 4$, -16 , 9, $x - 4$, jejichž aritmetický průměr se rovná 4, je:

- A/ 4 B/ 5 C/ 7 D/ 9

Úloha 240

9.1

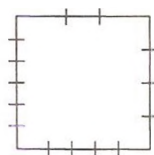
K písemné zkoušce připravil učitel sadu 12 úloh – 7 z pravděpodobnosti a 5 ze statistiky. Každý student si musí k řešení vybrat 5 úloh, z každého tématu alespoň dvě. Počet všech možností výběru pěti úloh je:

- A/ $\binom{12}{5}$ B/ $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2}$
 C/ $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} + \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2}$ D/ $\left[\binom{7}{2} + \binom{5}{3} \right] \cdot \left[\binom{7}{3} + \binom{5}{2} \right]$
 E/ $\binom{7}{2} + \binom{5}{3} + \binom{7}{3} + \binom{5}{2}$

Úloha 241

9.1

Uvnitř stran čtverce je umístěno 14 bodů tak, že na jednotlivých stranách leží postupně 2, 3, 4, 5 z těchto bodů (viz obrázek). Počet trojúhelníků, které mají vrcholy v těchto bodech, je:



- A/ 144 B/ 180 C/ 216 D/ 279 E/ 349

Úloha 242

9.1

Člen binomického rozvoje výrazu

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + x^5 \right)^{69}$$

neobsahující proměnnou x je roven kombinačnímu číslu:

- A/ $\binom{69}{9}$ B/ $\binom{69}{12}$ C/ $\binom{69}{16}$ D/ $\binom{69}{20}$ E/ $\binom{69}{26}$

Řešení: 238C, 239B, 240C, 241E, 242A

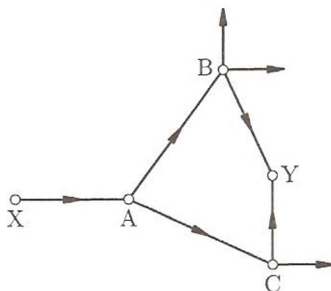
Úloha 243**9.2****ŘEŠENÍ**

Při hodu mincí padne líc s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a rub také s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Zkoumáme jev, kdy při všech hodech mincí padne líc. Nejmenší počet hodů, při němž je pravděpodobnost tohoto jevu menší než 0,002, je:

- A/ 5 B/ 7 C/ 9 D/ 12 E/ 15

Úloha 244**9.2**

Z města X do města Y se lze po silnici dostat dvěma způsoby podle obrázku. Automobilista, který nezná cestu, vyjede z města X správným směrem, ale na křižovatkách se rozhoduje náhodně, přičemž všechny výjezdy z každé křižovatky jsou stejně pravděpodobné. Pravděpodobnost, že automobilista dojde do města Y, je:



- A/ $\frac{1}{3}$ B/ $\frac{1}{2}$ C/ $\frac{5}{12}$ D/ $\frac{3}{5}$ E/ $\frac{2}{5}$

Otevřené úlohy**Úloha 245****9.2**

U ústní maturitní zkoušky je 30 otázek, z nichž si každý student losuje jednu. V průběhu dne se vytažená otázka mezi losované nevrací. Studenti se obávají čtyř otázek. Určete pravděpodobnost vytažení obávané otázky:

- prvním studentem
- druhým studentem, byla-li již jedna obávaná otázka vytažena
- čtvrtým studentem, jestliže zatím nebyla vytažena žádná obávaná otázka
- aspoň jedním z prvních čtyř studentů

str. 106

Úloha 246**9.1**

Sadař zakoupil 4 jabloně, 4 hrušně a 4 švestky. Chce je zasadit do tří řad po čtyřech stromech, jednotlivé stromy téhož druhu při tom nebude od sebe rozlišovat. Určete, kolika způsoby to může udělat, jestliže:

- každou řadu chce osázet stromy stejného druhu
- právě dvě řady chce osázet stromy stejného druhu
- právě jednu řadu chce osázet stromy stejného druhu
- žádnou řadu nechce osázet stromy stejného druhu

str. 106

Řešení: 243C, 244C

Úloha 247

9.1

- a) Dokažte, že počet úhlopříček konvexního n -úhelníku je $\frac{1}{2}n(n-3)$.
 b) Dva konvexní mnohoúhelníky bez společných vrcholů mají dohromady 14 stran a 29 úhlopříček. Kolik stran má každý z těchto mnohoúhelníků?

str. 107

Úloha 248

9.3

- a) Vypočítejte průměrnou cenu 1 kg mraženého kuřete, 1 kg poličanu a 1 litru polotučného mléka v osmi prodejnách uvedených v následující tabulce:

Prodejna	Kuře (1 kg)	Poličan (1 kg)	Mléko (1 l)
A	59,90	199	13,90
B	59,90	215	13,90
C	56,90	185	11,90
D	56,90	209	9,90
E	59,90	183	12,50
F	55,90	159	9,70
G	58,90	209	9,90
H	58,90	209	9,90

- b) Určete medián a modus cen 1 kg poličanu uvedených v tabulce.
 c) V které prodejně koupíme nejlevněji 1,5 kg mraženého kuřete, 1 kg poličanu a 3 litry polotučného mléka?

str. 107

Úloha 249

9.2

Nechť a je pravděpodobnost toho, že při současném hodu dvěma hracími kostkami bude součet počtů ok na jejich horních stěnách roven 7. Nechť b je pravděpodobnost toho, že při současném výběru dvou karet ze souboru 32 karet (po osmi kartách každé ze 4 různých barev) budou obě vybrané karty téže barvy. Nechť c je pravděpodobnost toho, že náhodně vybrané dvojčíferné číslo je dělitelné čtyřmi.

Uspořádejte čísla a , b , c podle velikosti.

str. 108

Úloha 250

9.3

Statistický soubor o rozsahu 1 000 statistických jednotek vyšetřujeme z hlediska jistého kvantitativního znaku x . Vzestupně uspořádané hodnoty znaku x pro jednotlivé statistické jednotky jsou

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1000}.$$

Předpokládejme, že se hodnoty znaku x u všech jednotek vyšetřovaného souboru zvětší o 5. Popište, jak se změní tyto charakteristiky znaku x :

- a) aritmetický průměr b) medián
 c) modus d) směrodatná odchylka

str. 108

ŘEŠENÍ OTEVŘENÝCH ÚLOH

1 Číselné množiny

Řešení úlohy 12

Z číslic na místě jednotek v obou činitelích zjistíme, že první hvězdička zprava nahrazuje číslici 7. Protože oba činitelé jsou dělitelní devíti, je devíti dělitelný i jejich součin n a jeho ciferný součet $S(n)$. Označme c hledanou číslici v čísle n . Platí:

$$S(n) = 4 + 1 + 1 + 5 + 2 + 2 + 6 + c + 9 + 5 + 8 + 8 + 4 + 7 + 7 + 3 + 7 = 79 + c$$

Protože $0 \leq c \leq 9$, platí $79 \leq S(n) \leq 88$. Odtud vyplývá, že $S(n) = 81$. Proto $c = 2$.

První hvězdička zleva nahrazuje číslici 2.

Řešení úlohy 13

Nechť n je libovolné přirozené číslo.

a) $2n(2n + 2) = 4n(n + 1)$

Protože jedno z čísel n , $n + 1$ je vždy sudé, je číslo $4n(n + 1)$ dělitelné osmi.

b) $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

Protože jedno z čísel n , $n + 1$, $n + 2$ je vždy dělitelné třemi, je číslo $n(n + 1)(n + 2)$ dělitelné třemi. Číslo $n(n + 1)(n + 2)$ je navíc sudé [viz a)]. Proto je číslo $8n(n + 1)(n + 2)$ dělitelné čtyřiceti osmi.

Řešení úlohy 14

a) Původní cena 1 l nafty:

$$a \text{ Kč}$$

Cena po 10% zdražení:

$$(1,1 \cdot a) \text{ Kč}$$

Cena po následném 8% zlevnění: $(0,92 \cdot 1,1 \cdot a) \text{ Kč} = (1,012 \cdot a) \text{ Kč}$

1 l nafty byl po 8% zlevnění dražší než před 10% zdražením, a to o 1,2 %.

b) Cena 1 l nafty po 10% zdražení:

$$(1,1 \cdot 25) \text{ Kč} = 27,50 \text{ Kč}$$

Cena po následném 8% zlevnění:

$$(0,92 \cdot 27,50) \text{ Kč} = 25,30 \text{ Kč}$$

Rozdíl obou cen je 2,20 Kč.

c) Označíme-li x hledaný počet procent, platí $\frac{100 - x}{100} \cdot 25,30 = 25$, odkud $x \doteq 1,19$.

Cenu nafty by bylo třeba ještě snížit přibližně o 1,19 %.

Řešení úlohy 15

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. Pro $n = 1$ dokazované tvrzení platí, neboť $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$.
2. Dokážeme, že z platnosti tohoto tvrzení pro přirozené číslo $n = k$ vyplývá jeho platnost pro $n = k + 1$.
Předpokládejme tedy, že číslo $k^3 + 5k$ je dělitelné šesti, a zkoumejme dělitelnost šesti čísla $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$:

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 + 5(k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = \\ &= k^3 + 5k + 3(k^2 + k + 2) = \\ &= (k^3 + 5k) + 3[k(k + 1) + 2]\end{aligned}$$

Číslo $k^3 + 5k$ je dělitelné šesti podle předpokladu a protože jedno z čísel k , $k + 1$ je vždy sudé, je rovněž číslo $3[k(k + 1) + 2]$ dělitelné šesti. Číslo $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$ je tedy dělitelné šesti.

Řešení úlohy 16

- a) Hledaná kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má kořeny $t_1 = 3 - 4i$, $t_2 = 3 + 4i$. Její koeficienty p , q určíme pomocí Viětových vzorců:

$$\begin{aligned}p &= -(t_1 + t_2) = -(3 - 4i + 3 + 4i) = -6 \\ q &= t_1 \cdot t_2 = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25\end{aligned}$$

Číslo $t = 3 - 4i$ je kořenem kvadratické rovnice $x^2 - 6x + 25 = 0$.

b) $u = 5i = 5 \cdot (\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi)$

c) $p = \frac{u}{t} = \frac{5i}{3 - 4i} = \frac{5i \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{-20 + 15i}{9 + 16} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

$$|p| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$$

Číslo p je komplexní jednotka.

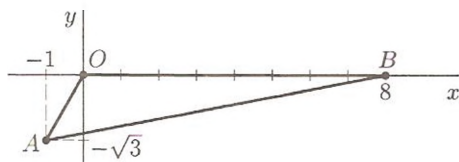
Řešení úlohy 17

a) $|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$

Pro argument φ čísla z platí $\cos \varphi = \frac{-1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, proto $\varphi = \frac{4}{3}\pi$.
 $z = 2 (\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = 2 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

b) $z^3 = (-1 - \sqrt{3}i)^3 = -(1 + \sqrt{3}i)^3 =$
 $= -[1 + 3 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 3\sqrt{3} \cdot (-i)] = 8$
 $z^3 = 2^3 \cdot [\cos (3 \cdot \frac{4}{3}\pi) + i \sin (3 \cdot \frac{4}{3}\pi)] = 8 (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = 8$

c)



$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

- d) Pro souřadnice těžiště T trojúhelníku ABO platí symbolická rovnost $T = \frac{1}{3}(A + B + O)$. Těžiště T je tedy obrazem komplexního čísla

$$\frac{1}{3} \cdot [(-1 - \sqrt{3}i) + 8 + 0] = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}i.$$

2 Algebraické výrazy

Řešení úlohy 40

- a) Necht' $n - 1$, n , $n + 1$, $n + 2$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, jsou libovolná čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla.

$$\begin{aligned}(n - 1) + (n + 2) &= 2n + 1 \\ |(n + 1)^2 - n^2| &= |n^2 + 2n + 1 - n^2| = 2n + 1\end{aligned}$$

Oba výrazy se skutečně rovnají.

- b) Necht' $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$, n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, je libovolných osm po sobě jdoucích přirozených čísel.

$$\begin{aligned}(n - 3)^2 + n^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 &= \\ &= n^2 - 6n + 9 + n^2 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 = \\ &= 4n^2 + 4n + 22 \\ (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + (n + 1)^2 + (n + 4)^2 &= \\ &= n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 8n + 16 = \\ &= 4n^2 + 4n + 22\end{aligned}$$

Opět se oba výrazy rovnají.

Řešení úlohy 41

- a) Jmenovatel zlomku se nesmí rovnat nule:

$$\begin{aligned}s(s + 2) - 8 &\neq 0 \\ s^2 + 2s - 8 &\neq 0 \\ (s + 4)(s - 2) &\neq 0\end{aligned}$$

Daný výraz má smysl právě pro $s \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$.

b) Za podmínek $s \neq -4$, $s \neq 2$ platí:

$$\frac{7s - 4 + 2s^2}{s(s+2) - 8} = \frac{2(s^2 + \frac{7}{2}s - 2)}{(s+4)(s-2)} = \frac{2(s+4)(s-\frac{1}{2})}{(s+4)(s-2)} = \frac{2s-1}{s-2}$$

c) Dosazením čísla $s = \sqrt{3}$ do daného a upraveného výrazu dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{7\sqrt{3} - 4 + 2 \cdot 3}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2) - 8} &= \frac{7\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{3} - 5} = \frac{(7\sqrt{3} + 2)(2\sqrt{3} + 5)}{(2\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{3} + 5)} = \\ &= \frac{39\sqrt{3} + 52}{4 \cdot 3 - 25} = \frac{39\sqrt{3} + 52}{-13} = -3\sqrt{3} - 4 \\ \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} &= \frac{(2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{-1} = -3\sqrt{3} - 4 \end{aligned}$$

Oba výsledky jsou stejné.

d) Řešíme nerovnici

$$\frac{2(s+4)(s-\frac{1}{2})}{(s+4)(s-2)} \geq 0.$$

Pro každé $s \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$ je tato nerovnice ekvivalentní s nerovnicí

$$\frac{s - \frac{1}{2}}{s - 2} \geq 0.$$

Řešení určíme ze schematu:



Daný výraz má nezápornou hodnotu právě tehdy, když

$$s \in (-\infty, -4) \cup (-4, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty).$$

Řešení úlohy 42

$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

Upravíme levé strany daných rovností:

$$\begin{aligned} \frac{a+b-3c}{3} + \frac{a-3b+c}{3} + \frac{-3a+b+c}{3} &= \frac{-a-b-c}{3} = \\ &= -\frac{a+b+c}{3} = -x \end{aligned}$$

$$(x-a) + (x-b) + (x-c) = 3x - (a+b+c) =$$

$$= 3 \cdot \frac{a+b+c}{3} - (a+b+c) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) &= \\
 &= 3x^2 + 2x(a+b+c) = \\
 &= 3 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot (a+b+c) = \\
 &= (a+b+c)^2 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = (a+b+c)^2
 \end{aligned}$$

Všechny tři rovnosti platí pro libovolná reálná čísla a, b, c .

Řešení úlohy 43

a) Pro rovnostranný trojúhelník ABC platí $a = b = c$, $s = \frac{3a}{2}$, a proto:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{3a}{2} - a\right)^3} = \sqrt{\frac{3}{16} a^4} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

b) Pro rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB platí $a = b$,

$$s = \frac{2a+c}{2}, \text{ a proto:}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \\
 &= \sqrt{\frac{2a+c}{2} \cdot \left(\frac{2a+c}{2} - a\right)^2 \cdot \left(\frac{2a+c}{2} - c\right)} = \\
 &= \sqrt{\frac{2a+c}{2} \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{2a-c}{2}} = \sqrt{\frac{c^2(4a^2 - c^2)}{16}} = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{4a^2 - c^2}
 \end{aligned}$$

Řešení úlohy 44

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{a+3b}{(a-b)^2} + \frac{a-3b}{a^2-b^2} \right] : \frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2} &= \\
 &= \frac{(a+3b)(a+b) + (a-3b)(a-b)}{(a-b)^2(a+b)} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2+3b^2} = \\
 &= \frac{2(a^2+3b^2)}{(a+b)(a^2+3b^2)} = \frac{2}{a+b}
 \end{aligned}$$

Jestliže $\frac{a+b}{2} = 2$, potom $\frac{2}{a+b} = \frac{1}{2}$.

Řešení úlohy 45

a) Výraz $h(x)$ je definován pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$x^2 + 4 \neq 0, \quad x^2 - 2x \neq 0, \quad 2x - 4 \neq 0, \quad x^2 - 4 \neq 0, \quad x - 2 \neq 0, \quad x \neq 0,$$

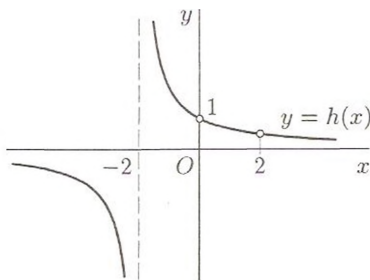
čili pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$. Tedy $M = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

b) Pro všechna $x \in M$ platí:

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[\frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \frac{4 + x^2}{2x(x - 2)} - \frac{4}{x^2 - 4} \right] \cdot \frac{x - 2}{x} = \\ &= \left[\frac{2}{x - 2} - \frac{4}{(x - 2)(x + 2)} \right] \cdot \frac{x - 2}{x} = \frac{2x}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{x} = \\ &= \frac{2}{x + 2} \end{aligned}$$

c) Aby pro celé číslo x byl zlomek $\frac{2}{x + 2}$ roven celému číslu, musí být $x + 2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, tedy $x \in \{-4, -3, -1, 0\}$. Protože pro číslo $x = 0$ není výraz $h(x)$ definován, hledanou množinou je množina $\{-4, -3, -1\}$.

d)



Řešení úlohy 46

a) Postupně dostaneme:

$$m^3 + 6^3 = 0$$

$$(m + 6) \cdot (m^2 - 6m + 36) = 0$$

$$m + 6 = 0 \quad \vee \quad m^2 - 6m + 36 = 0$$

Rovnice $m + 6 = 0$ má kořen $m_1 = -6$.

Pro diskriminant D kvadratické rovnice $m^2 - 6m + 36 = 0$ platí $D = 36 - 4 \cdot 36 = -108$, kořeny této rovnice tedy jsou

$$m_{2,3} = \frac{6 \pm i\sqrt{-108}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{3}i.$$

Daná rovnice má tři komplexní kořeny:

$$m_1 = -6, \quad m_2 = 3 + 3\sqrt{3}i, \quad m_3 = 3 - 3\sqrt{3}i$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{m^3 + 216}{5m - 30} : \left(m + \frac{36}{m - 6} \right) &= \\ &= \frac{(m + 6)(m^2 - 6m + 36)}{5(m - 6)} \cdot \frac{m - 6}{m^2 - 6m + 36} = \frac{m + 6}{5} \end{aligned}$$

Daný výraz má smysl, pokud $m - 6 \neq 0$ a zároveň $m^2 - 6m + 36 \neq 0$. Z části a) víme, že kvadratický trojčlen $m^2 - 6m + 36$ je nenulový pro každé $m \in \mathbb{R}$. Daný výraz má tedy smysl pro všechna reálná $m \neq 6$.

$$\text{c) } m + \frac{36}{m - 6} = \frac{m^2 - 6m + 36}{m - 6}$$

Protože rovnice $m^2 - 6m + 36 = 0$ nemá žádný reálný kořen, je čítecel posledního zlomku kladný pro každé $m \in \mathbb{R}$.

Zkoumaný výraz je proto kladný právě tehdy, když $m - 6 > 0$, tj. právě pro $m > 6$.

Řešení úlohy 47

Platí

$$x^4 - x^3 - 7x^2 = (x^2 - 3x + a) \cdot (x^2 + bx - 2) + cx + 2,$$

tedy

$$x^4 - x^3 - 7x^2 = x^4 + (b - 3)x^3 + (a - 3b - 2)x^2 + (ab + 6 + c)x + (-2a + 2).$$

Porovnáním koeficientů u x^3 , x^0 a x^1 postupně dostaneme $b - 3 = -1$, tedy $b = 2$, $-2a + 2 = 0$, tedy $a = 1$, a $ab + 6 + c = 0$, odkud

$$c = -6 - 1 \cdot 2 = -8.$$

Řešení úlohy 48

a) Jedinou podmínkou je $x \neq 0$; výraz pod odmocninou je totiž pro každé $x \neq 0$ kladný.

b) $(x^2 + 1) \cdot |x| = 0$ pouze pro $x = 0$, ale pro $x = 0$ není výraz $V(x)$ definován. Neexistuje tedy žádné $x \in \mathbb{R}$, pro které by daný výraz měl hodnotu nula.

c) Pro každé $x \neq 0$ platí:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{(x^2 + 1) \cdot |x|}{x \cdot \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} + \frac{4x^2}{4x^2}} = \frac{(x^2 + 1) \cdot |x|}{x \cdot \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}}} = \\ &= \frac{(x^2 + 1) \cdot |x|}{x \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^2}} = \frac{(x^2 + 1) \cdot |x|}{x \cdot \left|\frac{x^2 + 1}{2x}\right|} = \frac{(x^2 + 1) \cdot |x|}{x \cdot \frac{x^2 + 1}{2|x|}} = \\ &= \frac{(x^2 + 1) \cdot |x|^2 \cdot 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2x^2}{x} = 2x \end{aligned}$$

Řešení úlohy 49

$$\begin{aligned} V(a) &= \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{2a}{(a+1)(a+3)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \\ &= \frac{a+3+2a(a+2)+a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{2a^2+6a+4}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \\ &= \frac{2(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{2}{a+3} \end{aligned}$$

pro $a \neq -1$, $a \neq -2$, $a \neq -3$.

Zlomek $\frac{2}{a+3}$ je pro celé číslo a roven celému číslu právě tehdy, když $a+3 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, tedy $a \in \{-5, -4, -2, -1\}$. Protože pro čísla $a = -2$ a $a = -1$ nemá výraz $V(a)$ smysl, je jeho hodnota rovna celému číslu pouze pro celá čísla $a \in \{-5, -4\}$.

Řešení úlohy 50

Uvažujme libovolné dva zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, které lze podle předpisu dvou kamrádů sečíst; a, b, c, d jsou reálná čísla, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b \neq -d$.

Máme zjistit, kdy platí

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right).$$

Ekvivalentními úpravami postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{b+d} &= \frac{ad+bc}{2bd} \\ 2abd+2bcd &= abd+b^2c+ad^2+bcd \\ abd-ad^2+bcd-b^2c &= 0 \\ ad(b-d)+bc(d-b) &= 0 \\ (b-d)(ad-bc) &= 0 \\ b=d \quad \vee \quad ad &= bc \\ b=d \quad \vee \quad \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \end{aligned}$$

Zkoumaná rovnost platí pouze pro zlomky se stejnými jmenovateli a pro zlomky, které se sobě rovnají a jejichž jmenovatele nejsou čísla navzájem opačná.

3 Rovnice a nerovnice

Řešení úlohy 82

Pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$ platí $x - 1 \leq 0$, a proto $|x - 1| = -x + 1$.

Interval $\langle -1, 1 \rangle$ rozdělíme bodem $-\frac{2}{3}$ na dva intervaly; v každém z nich vyřešíme danou nerovnici zvlášť.

1. Pro $x \in \langle -1, -\frac{2}{3} \rangle$ upravíme danou nerovnici postupně takto:

$$\begin{aligned}x + x^2 - |3x + 2| + 2|x - 1| &\leq (x - 1)^2 \\x + x^2 - (-3x - 2) + 2(-x + 1) &\leq (x - 1)^2 \\4x &\leq -3 \\x &\leq -\frac{3}{4} \\x \in (-\infty, -\frac{3}{4}) \cap \langle -1, -\frac{2}{3} \rangle &= \langle -1, -\frac{3}{4} \rangle\end{aligned}$$

2. Pro $x \in \langle -\frac{2}{3}, 1 \rangle$ postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}x + x^2 - |3x + 2| + 2|x - 1| &\leq (x - 1)^2 \\x + x^2 - (3x + 2) + 2(-x + 1) &\leq (x - 1)^2 \\-2x &\leq 1 \\x &\geq -\frac{1}{2} \\x \in \langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle \cap \langle -\frac{2}{3}, 1 \rangle &= \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle\end{aligned}$$

Množina všech řešení dané nerovnice v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ je

$$\langle -1, -\frac{3}{4} \rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle.$$

Řešení úlohy 83

Daná rovnice má mít dva kořeny, proto $p \neq 0$. Kořeny jsou:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-5p + 1 \pm \sqrt{(5p - 1)^2 - 4p(4p - 1)}}{2p} = \\&= \frac{-5p + 1 \pm (3p - 1)}{2p} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{p} - 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Proto

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{1}{p} - 3 \right|$$

a hledaná p jsou kořeny rovnice

$$\left| \frac{1}{p} - 3 \right| = 1,$$

neboli kořeny rovnic

$$\frac{1}{p} - 3 = 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{p} - 3 = -1.$$

Vyhovují pouze čísla $p_1 = \frac{1}{4}$ a $p_2 = \frac{1}{2}$.

Řešení úlohy 84

Danou rovnici upravíme na tvar:

$$(a + 2)x = a - 2$$

- a) Tato rovnice nemá řešení pouze pro $a = -2$.
b) Pro každé $a \neq -2$ má daná rovnice právě jeden kořen

$$x = \frac{a - 2}{a + 2}.$$

Při zjišťování toho, kdy je tento kořen nezáporný, můžeme postupovat např. takto:

$$\frac{a - 2}{a + 2} \geq 0$$

$$(a - 2 \geq 0 \wedge a + 2 > 0) \vee (a - 2 \leq 0 \wedge a + 2 < 0)$$

$$a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

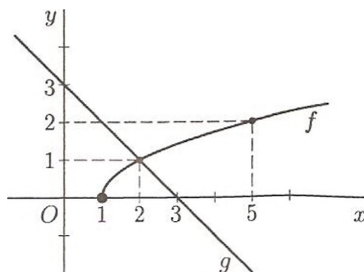
c)
$$\frac{a - 2}{a + 2} < 0$$
$$a \in (-2, 2)$$

Řešení úlohy 85

a)
$$\sqrt{x - 1} + x = 3$$
$$\sqrt{x - 1} = 3 - x$$
$$x - 1 = 9 - 6x + x^2$$
$$0 = (x - 2)(x - 5)$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5$$

Zkouškou zjistíme, že řešením dané rovnice je jen $x_1 = 2$.

b)



- c) Z grafu funkce f vyčteme, že $D_f = \langle 1, \infty \rangle$, $H_f = \langle 0, \infty \rangle$.

d) Z grafu funkce f vidíme, že $f(x) < 2$ pro $x \in \langle 1, 5 \rangle$.

Výpočtem pro každé $x \in D_f$, tedy pro každé $x \geq 1$, dostaneme:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} &< 2 \\ x-1 &< 4 \\ x &< 5 \\ x &\in \langle 1, 5 \rangle\end{aligned}$$

Řešení úlohy 86

a) Uspořádané trojice $(0, 2, 2)$ i $(1, 2, 1)$ řeší první dvě rovnice dané soustavy. Dosadíme je do třetí rovnice:

$$4 \cdot 0 + b \cdot 2 + c \cdot 2 = 14$$

$$4 \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 14$$

Odečteme-li druhou z těchto rovnic od první z nich, vypočteme $c = 4$ a dále $b = 3$.

b)

$$x + y + z = 4$$

$$2x + y + 2z = 6$$

$$4x + 3y + 4z = 14$$

Odečteme-li od druhé rovnice dvojnásobek první rovnice a od třetí rovnice čtyřnásobek první rovnice, dostaneme soustavu:

$$x + y + z = 4$$

$$-y = -2$$

$$-y = -2$$

Všechna její řešení získáme takto:

$$y = 2, \quad x \text{ volíme libovolně,} \quad z = 4 - x - y = 4 - x - 2 = 2 - x.$$

Řešeními jsou tedy právě všechny trojice $(x, 2, 2 - x)$, kde $x \in \mathbb{R}$.

c) $z = 2 - x = 0$, odkud $x = 2$.

Jediné řešení (x, y, z) , pro něž $z = 0$, je $(2, 2, 0)$.

Řešení úlohy 87

Danou rovnici upravíme na tvar:

$$2(p-1)|x| = p^2 - 1$$

Je-li $p = 1$, je jejím řešením každé reálné číslo x .

Pro $p \neq 1$ provedeme další úpravu:

$$|x| = \frac{1}{2}(p+1)$$

Je-li $p = -1$, má daná rovnice jeden kořen $x = 0$.

Je-li $p > -1$, $p \neq 0$, $p \neq 1$, má daná rovnice dva kořeny $x_1 = -\frac{1}{2}(p+1)$, $x_2 = \frac{1}{2}(p+1)$.

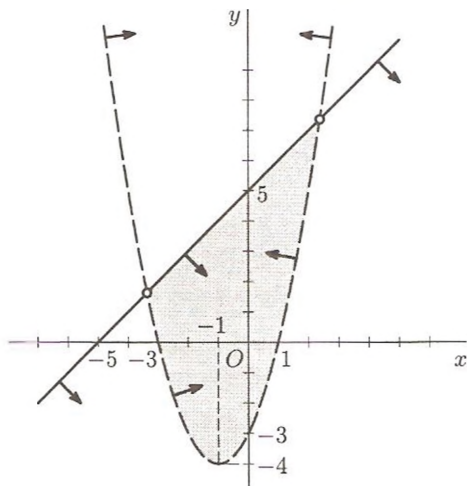
Je-li $p < -1$, nemá daná rovnice žádné řešení.

Řešení úlohy 88

Hraniční křivkou množiny všech bodů $[x, y]$, pro něž $y > x^2 + 2x - 3$, je parabola $y = x^2 + 2x - 3$. Protože $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, protíná tato parabola osu x v bodech $[-3, 0]$, $[1, 0]$; osu y protíná v bodě $[0, -3]$. Vrcholový tvar rovnice uvažované paraboly je $y + 4 = (x + 1)^2$, proto má vrchol v bodě $[-1, -4]$.

Množina všech bodů $[x, y]$, pro něž $x - y + 5 \geq 0$, je polorovina s hraniční přímkou $x - y + 5 = 0$ a vnitřním bodem např. $[0, 0]$.

Grafické znázornění množiny všech řešení dané soustavy nerovnic:



Řešení úlohy 89

Původní odlitek byl z x kg stříbra a y kg mědi. Zastoupení stříbra po prvním přetavení vyjadřuje rovnice

$$\frac{x + 5}{x + y + 5} = \frac{60}{100},$$

výsledku druhého přetavení odpovídá rovnice

$$\frac{x + 5}{x + y + 10} = \frac{48}{100}.$$

Úpravou získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3y - 2x &= 10, \\ 12y - 13x &= 5, \end{aligned}$$

z níž vypočteme $x = 7$ a $y = 8$.

V původní slitině bylo $(\frac{7}{7+8} \cdot 100)\%$, tj. $46\frac{2}{3}\%$ stříbra.

Řešení úlohy 90

a) Pro $a = 0$ nemá daná rovnice žádné řešení.

Pro $a \neq 0$ jde o kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = a^2 - 20a = a(a - 20).$$

Tato kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny právě tehdy, když $D = a(a - 20) > 0$, tj. pro $a \in (-\infty, 0) \cup (20, \infty)$.

b) Kořeny dané rovnice pro $a \in (-\infty, 0) \cup (20, \infty)$ jsou

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a(a - 20)}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{a(a - 20)}}{2a}.$$

Máme určit, pro která $a \in (-\infty, 0) \cup (20, \infty)$ platí $2x_1 = x_2$, nebo $2x_2 = x_1$.

Zkoumejme nejprve první možnost $2x_1 = x_2$:

$$\begin{aligned} \frac{-a + \sqrt{a(a - 20)}}{a} &= \frac{-a - \sqrt{a(a - 20)}}{2a} \\ -2a + 2 \cdot \sqrt{a(a - 20)} &= -a - \sqrt{a(a - 20)} \\ 3 \cdot \sqrt{a(a - 20)} &= a \end{aligned}$$

Pro $a \in (-\infty, 0)$ poslední rovnost platit nemůže.

Pro $a \in (20, \infty)$ ji umocníme na druhou:

$$\begin{aligned} 9(a^2 - 20a) &= a^2 \\ a(8a - 180) &= 0 \\ a = 0 \notin (20, \infty), \quad a = \frac{45}{2} &\in (20, \infty) \end{aligned}$$

Druhá možnost $2x_2 = x_1$:

$$\begin{aligned} \frac{-a - \sqrt{a(a - 20)}}{a} &= \frac{-a + \sqrt{a(a - 20)}}{2a} \\ -3 \cdot \sqrt{a(a - 20)} &= a \end{aligned}$$

Tato rovnost nemůže platit pro $a \in (20, \infty)$.

Pro $a \in (-\infty, 0)$ dostaneme po úpravě:

$$\begin{aligned} a(8a - 180) &= 0 \\ a = 0 \notin (-\infty, 0), \quad a = \frac{45}{2} &\notin (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Daná rovnice má dva reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobkem druhého, pouze pro $a = \frac{45}{2}$.

Řešení úlohy 91

Za dvě hodiny ujela auta dohromady $(220 - 4)$ km, tj. 216 km, za jednu hodinu 108 km. Rychlejší auto jelo rychlostí x km/h, pomalejší rychlostí $(108 - x)$ km/h. Řešíme rovnici:

$$\frac{220}{108 - x} = \frac{220}{x} + \frac{55}{60}$$

$$\frac{4}{108 - x} = \frac{4}{x} + \frac{1}{60}$$

$$240x = 240(108 - x) + x(108 - x)$$

$$x^2 + 372x - 25\,920 = 0$$

$$x_1 = 60, \quad x_2 = -432$$

Rychlejší auto jelo rychlostí 60 km/h, doba jeho jízdy byla $\frac{220}{60}$ h, tj. 3 h 40 min. Do cíle dorazilo v 11:40.

Řešení úlohy 92

Postupně upravujeme:

$$1 + \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1 \quad /^2$$

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1$$

$$2x - x^2 = \sqrt{x^4 - x^2} \quad /^2$$

$$x^2(2 - x)^2 = x^2(x^2 - 1)$$

$$x^2(4 - 4x + x^2 - x^2 + 1) = 0$$

$$x^2(5 - 4x) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{5}{4}$$

Protože jsme používali důsledkové úpravy, provedeme zkoušku:

$$L(0) = 2, \quad P(0) = 0; \quad L\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}, \quad P\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

Jediným kořenem dané rovnice je číslo $\frac{5}{4}$.

Řešení úlohy 93

Označme $|AB| = a$ m, $|BC| = b$ m; podle zadání platí $a > b$.

a) Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{r} 2(a+b) = 28 \\ a^2 + b^2 = 10^2 \\ \hline a+b = 14 \\ a^2 + (14-a)^2 = 100 \\ \hline a+b = 14 \\ a^2 - 14a + 48 = 0 \\ \hline a+b = 14 \\ (a-6)(a-8) = 0 \end{array}$$

Řešením je dvojice $(a_1, b_1) = (8, 6)$ a dvojice $(a_2, b_2) = (6, 8)$; podmínce $a > b$ vyhovuje pouze první z nich.

Děvčata musí ujít 8 m, chlapci 6 m.

b) Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{r} 2(a+b) = 28 \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \\ \hline 2a+2b = 28 \\ 2a = 3b \\ \hline 2a = 3b \\ 5b = 28 \\ \hline b = 5,6 \\ a = 8,4 \end{array}$$

Děvčata musí ujít 8,4 m, chlapci 5,6 m.

c) Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{r} 2(a+b) = 28 \\ ab = 45 \\ \hline a+b = 14 \\ ab = 45 \end{array}$$

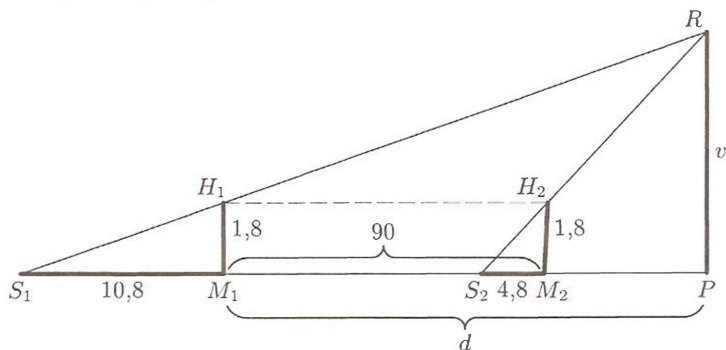
Řešením je dvojice $(a_1, b_1) = (9, 5)$ a dvojice $(a_2, b_2) = (5, 9)$; podmínku $a > b$ splňuje pouze první z nich.

Děvčata musí ujít 9 m, chlapci 5 m.

Řešení úlohy 94

- a) Označme v metrů výšku reflektoru nad silnicí a d metrů vzdálenost muže od stožáru ve chvíli, kdy byl jeho stín dlouhý 10,8 m.

Podmínky úlohy zachytíme v náčrtku:



Ze dvojice podobných trojúhelníků RPS_1 a $H_1M_1S_1$ a dvojice podobných trojúhelníků RPS_2 a $H_2M_2S_2$ dostaneme soustavu rovnic:

$$\frac{v}{d + 10,8} = \frac{1,8}{10,8}$$

$$\frac{v}{d - 90 + 4,8} = \frac{1,8}{4,8}$$

Úpravou získáme soustavu lineárních rovnic

$$10,8v = 1,8d + 19,44,$$

$$4,8v = 1,8d - 153,36,$$

z níž vypočteme $d = 162$, $v = 28,8$.

Výška reflektoru nad silnicí je 28,8 m.

- b) Označme x metrů vzdálenost muže od paty stožáru ve chvíli, kdy bude jeho stín dlouhý 1 m. Podobně jako v části a) dostaneme ze dvojice podobných trojúhelníků rovnici

$$\frac{28,8}{x + 1} = \frac{1,8}{1}, \quad \text{odkud} \quad x = 15.$$

Z části a) víme, že na začátku byl muž od paty stožáru vzdálen 162 m a ve chvíli, kdy je jeho stín dlouhý 4,8 m, je tato vzdálenost $(162 - 90) \text{ m} = 72 \text{ m}$.

Aby stín muže byl dlouhý 1 m, musí ujít ještě 57 m.

Řešení úlohy 95

a) Jestliže $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, potom $\bar{z} = x - iy$.

Dosažením do dané rovnice dostaneme:

$$(x + iy) + (x - iy) \cdot (2 + i) = (x + iy) \cdot (x - iy)$$

$$(3x + y) + i \cdot (x - y) = x^2 + y^2$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí získáme požadované rovnice pro reálné neznámé x, y :

$$3x + y = x^2 + y^2$$

$$x - y = 0$$

Dosadíme-li $x = y$ ze druhé rovnice do první, obdržíme

$$4x = 2x^2,$$

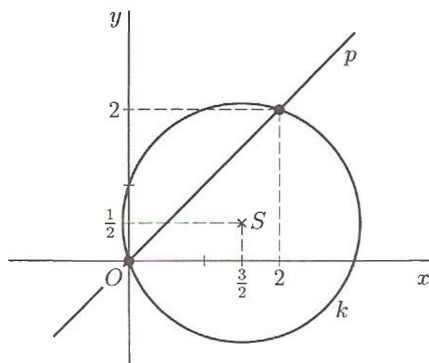
odkud $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, a dále $y_1 = x_1 = 0$, $y_2 = x_2 = 2$.

Řešeními dané rovnice jsou komplexní čísla $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + 2i$.

b) Rovnice $3x + y = x^2 + y^2$ je rovnicí kružnice, její středový tvar je

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4},$$

rovnice $x - y = 0$ je rovnicí přímky:



Společné body obou křivek jsou obrazy řešení dané rovnice.

Řešení úlohy 96

Otec sám natře plot za x hodin, syn za y hodin. Platí

$$\frac{1}{x} + 9 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1,$$

$$\frac{4}{y} + 8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1.$$

Pro neznámé $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$ dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$10u + 9v = 1,$$

$$8u + 12v = 1$$

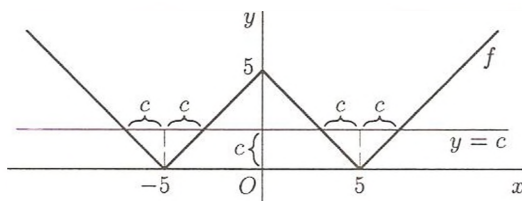
s řešením $u = \frac{1}{16}$, $v = \frac{1}{24}$. Proto $x = 16$, $y = 24$. Otec se synem společně zvládnou za jednu hodinu $(\frac{1}{16} + \frac{1}{24})$ úkolu, tj. $\frac{5}{48}$ úkolu.

Společná práce bude trvat $\frac{48}{5}$ hodiny, tj. 9 hodin a 36 minut.

4 Funkce

Řešení úlohy 119

- a) Graf je na obrázku vpravo.
- b) Z grafu je vidět, že množina M všech řešení dané rovnice závisí na parametru c takto:



$c < 0$	$M = \emptyset$
$c = 0$	$M = \{-5, 5\}$
$c \in (0, 5)$	$M = \{-5 - c, -5 + c, 5 - c, 5 + c\}$
$c = 5$	$M = \{-10, 0, 10\}$
$c > 5$	$M = \{-5 - c, 5 + c\}$

Řešení úlohy 120

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$
- b) Řešíme exponenciální rovnici:

$$3^{\frac{6+x}{x}} = (\sqrt{3})^{x+1}$$

$$3^{\frac{6+x}{x}} = 3^{\frac{x+1}{2}}$$

$$\frac{6+x}{x} = \frac{x+1}{2}$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 4$$

Rovnost $f(x) = g(x)$ platí pro $x \in \{-3, 4\}$.

c) Řešíme nerovnici:

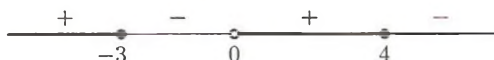
$$3^{\frac{6+x}{x}} \geq (\sqrt{3})^{x+1}$$

$$\frac{6+x}{x} \geq \frac{x+1}{2}$$

$$\frac{-x^2 + x + 12}{2x} \geq 0$$

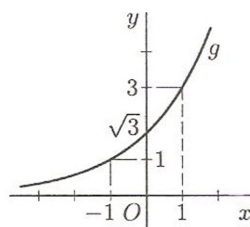
$$\frac{-(x-4)(x+3)}{2x} \geq 0$$

Ze schematu



vidíme, že nerovnost $f(x) \geq g(x)$ platí právě pro všechna $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 4)$.

d) Graf funkce g :



Řešení úlohy 121

a) Předpis pro funkci f^{-1} :

$$x = \frac{1}{2}y + 1$$

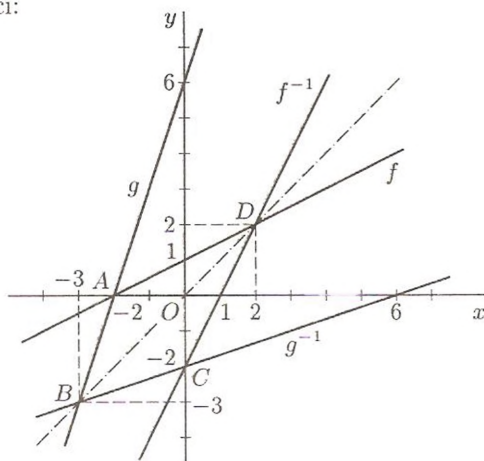
$$f^{-1}: y = 2x - 2$$

Předpis pro funkci g^{-1} :

$$x = 3y + 6$$

$$g^{-1}: y = \frac{1}{3}x - 2$$

Grafy všech funkcí:



b) Průsečík grafů funkcí f, g : $A[-2, 0]$.

Průsečík grafů funkcí f^{-1}, g^{-1} : $C[0, -2]$.

Průsečík D grafů funkcí f, f^{-1} :

$$\frac{1}{2}x + 1 = 2x - 2, \text{ odkud } x = 2; \quad \text{tedy } D[2, 2].$$

Průsečík B grafů funkcí g, g^{-1} :

$$\frac{1}{3}x - 2 = 3x + 6, \text{ odkud } x = -3; \quad \text{tedy } B[-3, -3].$$

Délky úhlopříček:

$$|AC| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad |BD| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Řešení úlohy 122

a) Protože $x^2 + 2x - 3 = 0$ jen pro $x = -3$ a $x = 1$, je

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}.$$

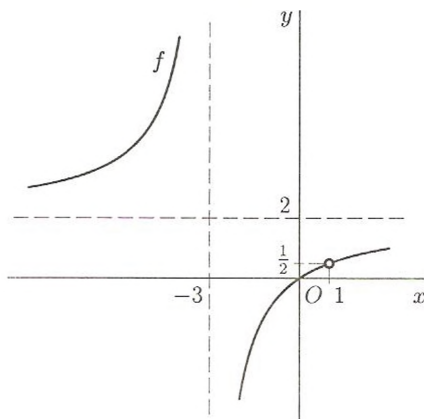
Pro každé $x \in D_f$ platí

$$\frac{2(x^2 - x)}{x^2 + 2x - 3} = \frac{2x(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{2x}{x + 3} = \frac{2(x + 3) - 6}{x + 3} = 2 - \frac{6}{x + 3}.$$

Předpis pro funkci f proto můžeme psát ve tvaru:

$$f: y = 2 - \frac{6}{x + 3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$$

Grafem funkce f je hyperbola, z níž je „odstraněn“ jeden bod:



Z obrázku je vidět, že $H_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 2\}$.

$$b) D_{f^{-1}} = H_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}, \quad H_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$$

Předpis pro funkci f^{-1} :

$$x = \frac{2y}{y+3}$$

$$xy + 3x = 2y$$

$$3x = y(2-x)$$

$$f^{-1}: y = \frac{3x}{2-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

Řešení úlohy 123

- a) Hmotnost písku tvoří $\frac{190}{200} \cdot 100\%$, tj. 95 % celkové hmotnosti bedny s pískem.
- b) Prázdná bedna má hmotnost 10 kg, což má být 25 % celkové hmotnosti. Písek má mít tedy hmotnost 30 kg. Proto je třeba z bedny odebrat $(190 - 30)$ kg, tj. 160 kg písku.
- c) Odebereme-li z plné bedny x kg písku, zbude v ní $(190 - x)$ kg písku a bedna s pískem bude mít hmotnost $(200 - x)$ kg. Hmotnost písku pak bude tvořit $\frac{190-x}{200-x} \cdot 100\%$ celkové hmotnosti bedny s pískem.

Hledaná funkce je dána předpisem

$$y = \frac{190-x}{200-x} \cdot 100, \quad x \in \langle 0, 190 \rangle.$$

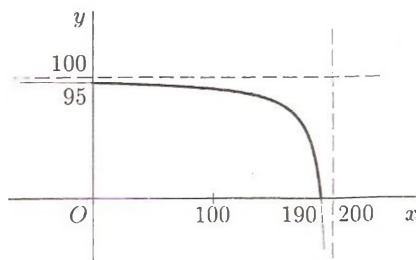
- d) Funkční předpis z bodu c) upravíme.

$$\begin{aligned} \frac{190-x}{200-x} \cdot 100 &= \frac{x-200+10}{x-200} \cdot 100 = \\ &= \left(1 + \frac{10}{x-200} \right) \cdot 100 = 100 + \frac{1000}{x-200}, \end{aligned}$$

tedy

$$y = 100 - \frac{1000}{200-x}, \quad x \in \langle 0, 190 \rangle.$$

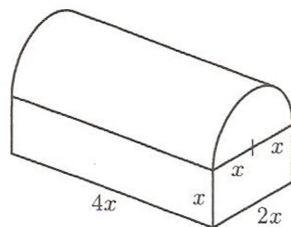
Grafem je část hyperboly:



Řešení úlohy 124

- a) Označme x dm délku nejkratší hrany kvádru, tj. jeho výšku. Objem V dm³ truhly je součtem objemů kvádru a poloviny válce:

$$\begin{aligned} V &= x \cdot 2x \cdot 4x + \frac{1}{2} \cdot \pi x^2 \cdot 4x = \\ &= 2(4 + \pi)x^3 \end{aligned}$$



- b) Pro povrch S dm² truhly platí:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (x \cdot 2x) + 2 \cdot (x \cdot 4x) + 2x \cdot 4x + 2 \cdot \frac{1}{2} \pi x^2 + \pi x \cdot 4x = \\ &= 5(4 + \pi)x^2 \end{aligned}$$

Nerovnosti

$$300 < S < 800,$$

postupně upravíme:

$$300 < 5(4 + \pi)x^2 < 800$$

$$\frac{60}{4 + \pi} < x^2 < \frac{160}{4 + \pi}$$

$$\sqrt{\frac{60}{4 + \pi}} < x < \sqrt{\frac{160}{4 + \pi}}$$

Protože

$$\sqrt{\frac{60}{4 + \pi}} \doteq 2,90, \quad \sqrt{\frac{160}{4 + \pi}} \doteq 4,73,$$

je definičním oborem uvažované funkce interval $(2,90; 4,73)$ – krajní body jsou uvedeny přibližně.

- c) Pro povrch víka platí

$$2 \cdot \frac{1}{2} \pi x^2 + \pi x \cdot 4x = 80\pi, \quad \text{odkud} \quad x = 4.$$

Rozměry kvádru jsou 4 dm, 8 dm, 16 dm.

Řešení úlohy 125

- a) Nechtě $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$, $c \neq 1$. Označíme-li

$$\log_b a = x,$$

pak s použitím definice logaritmu a pravidel pro počítání s logaritmy můžeme postupně psát:

$$b^x = a$$

$$\log_c b^x = \log_c a$$

$$x \cdot \log_c b = \log_c a$$

$$x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

- b) S využitím dokázané rovnosti převedeme všechny logaritmy na logaritmy se základem 2 a pak dále upravujeme:

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x &= 2 \\ \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \right)^2 + 3 \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} &= 2 \\ \left(\frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} \right)^2 + 3 \log_2 x + \frac{\log_2 x}{-1} &= 2 \\ 2 \log_2^2 x + \log_2 x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Substitucí $y = \log_2 x$ získáme kvadratickou rovnici

$$2y^2 + y - 1 = 0, \quad \text{odkud} \quad y = -1 \quad \text{nebo} \quad y = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\log_2 x = -1$ nebo $\log_2 x = \frac{1}{2}$, čili $x = \frac{1}{2}$ nebo $x = \sqrt{2}$.

Množinou všech řešení dané rovnice je množina $\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\}$.

Řešení úlohy 126

Všechny údaje ze zadání jsou vyznačeny v obrázku.

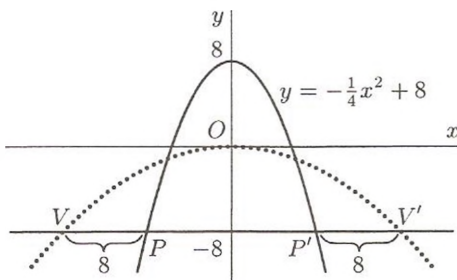
Body P, P' leží na parabole $y = -\frac{1}{4}x^2 + 8$ a jejich y -ové souřadnice jsou rovny číslu -8 . Snadno vypočteme x -ové souřadnice těchto bodů: $P[-8, -8]$, $P'[8, -8]$.

Odtud: $V[-16, -8]$, $V'[16, -8]$.

„Tečkovaná“ parabola, jejíž část znázorňuje lávku, je grafem funkce, která je dána předpisem tvaru $y = kx^2$. Například dosazením souřadnic bodu V dostaneme $-8 = k \cdot (-16)^2$, odkud $k = -\frac{1}{32}$.

Hledaná funkce je

$$y = -\frac{1}{32}x^2, \quad x \in \langle -16, 16 \rangle.$$



Řešení úlohy 127

Číslo x je řešením rovnice $\cos(3x - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$ právě tehdy, když

$$3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{nebo} \quad 3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

tedy

$$x = \frac{(24k + 11)\pi}{36}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{nebo} \quad x = \frac{(24k + 19)\pi}{36}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zjistíme, pro která čísla $k \in \mathbb{Z}$ patří číslo $\frac{(24k+11)\pi}{36}$, resp. $\frac{(24k+19)\pi}{36}$ do intervalu $\langle -\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$:

$$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{(24k+11)\pi}{36} < \frac{5\pi}{4}$$

$$-12 \leq 24k+11 < 45$$

$$-23 \leq 24k < 34$$

$$k \in \{0, 1\}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{(24k+19)\pi}{36} < \frac{5\pi}{4}$$

$$-12 \leq 24k+19 < 45$$

$$-31 \leq 24k < 26$$

$$k \in \{-1, 0, 1\}$$

Daná rovnice má tedy v intervalu $\langle -\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$ právě pět kořenů:

$$x_1 = \frac{11}{36}\pi, \quad x_2 = \frac{35}{36}\pi, \quad x_3 = -\frac{5}{36}\pi, \quad x_4 = \frac{19}{36}\pi, \quad x_5 = \frac{43}{36}\pi$$

Řešení úlohy 128

Pomocí substituce $z = 4^{-\sin x}$ převedeme danou nerovnici

$$4^{-2\sin x} - 4^{-\sin x} - 2 < 0$$

na kvadratickou nerovnici a tu vyřešíme:

$$z^2 - z - 2 < 0$$

$$(z+1)(z-2) < 0$$

$$-1 < z < 2$$

Číslo x je tedy řešením dané nerovnice právě tehdy, když:

$$-1 < 4^{-\sin x} < 2$$

$$-1 < 2^{-2\sin x} < 2$$

Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $2^{-2\sin x} > 0$, je nerovnost $-1 < 2^{-2\sin x}$ splněna „automaticky“ a v řešení pokračujeme takto:

$$2^{-2\sin x} < 2^1$$

$$-2\sin x < 1$$

$$\sin x > -\frac{1}{2}$$

Množinou všech řešení nerovnice $\sin x > -\frac{1}{2}$, a tedy také dané nerovnice, je sjednocení všech intervalů

$$\left(-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení úlohy 129

Ze zadání víme, že uvažované paraboly jsou shodné a jedna z nich se rozvírá směrem nahoru a druhá směrem dolů. Proto $a = -1$ a

$$f_2: y = -x^2 + 2bx + 5.$$

Nyní oba funkční předpisy upravíme:

$$f_1: y = (x + 2)^2 + q - 4, \quad f_2: y = -(x - b)^2 + 5 + b^2$$

Parabola, která je grafem funkce f_1 , má vrchol $V_1[-2, q - 4]$ a parabola, která je grafem funkce f_2 , má vrchol $V_2[b, 5 + b^2]$. Vrcholy parabol jsou souměrně sdružené podle osy $y = 1$ právě tehdy, když platí

$$-2 = b \quad \text{a zároveň} \quad \frac{(q - 4) + (5 + b^2)}{2} = 1,$$

odkud $b = -2$ a $q = 1 - b^2 = -3$.

5 Posloupnosti

Řešení úlohy 141

1. den:

x kliků

2. – 5. den (celkem):

$$\left[\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2x + \left(\frac{3}{2}\right)^3x + \left(\frac{3}{2}\right)^4x \right] \text{ kliků}$$

6. a 7. den (celkem):

$$\left[\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^4x \right] \text{ kliků}$$

Celkem:

$$\left[x + \frac{3}{2}x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1}{\frac{3}{2} - 1} + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4x \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) \right] \text{ kliků}$$

Platí tedy:

$$x + \frac{3}{2}x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1}{\frac{3}{2} - 1} + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4x \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) = 2315$$

$$\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{130}{16} + \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{16} \cdot \frac{7}{3}\right)x = 2315$$

$$\frac{463}{16}x = 2315$$

$$x = 80$$

Kulturista provedl první den 80 kliků.

Řešení úlohy 142

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je n -tý člen dané posloupnosti roven:

$$\frac{60 + 11n - 3n^2}{n + 3} = \frac{(n + 3)(20 - 3n)}{n + 3} = 20 - 3n = 17 + (n - 1) \cdot (-3)$$

Posloupnost je tedy aritmetická s prvním členem 17 a diferencí -3 .

b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$s_n = \frac{1}{2}n(17 + 20 - 3n) = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{37}{2}n$$

c) Kvadratický výraz z bodu b) upravíme na druhou mocninu lineárního dvojčlenu:

$$\begin{aligned}s_n &= -\frac{3}{2}\left(n^2 - \frac{37}{3}n\right) = -\frac{3}{2}\left[\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 - \left(\frac{37}{6}\right)^2\right] = \\ &= -\frac{3}{2}\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1369}{36} = -\frac{3}{2}\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 + \frac{1369}{24}\end{aligned}$$

Výraz s_n má maximální hodnotu pro takové přirozené číslo n , pro které je číslo $\left(n - \frac{37}{6}\right)^2$ nejmenší, tedy pro $n = 6$. Přitom

$$s_6 = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1369}{24} = \frac{1369-1}{24} = 57.$$

Řešení úlohy 143

Kdyby bylo $q = 1$, potom by z podmínky $a_4 = 9a_2$ vyplývalo $a_1 = 0$ a součet prvních čtyř členů by nebyl 80. Proto $q \neq 1$.

Podle zadání platí

$$a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 80, \quad (1)$$

$$a_1 q^3 = 9a_1 q. \quad (2)$$

Druhou rovnici upravíme na tvar

$$a_1 q(q^2 - 9) = 0,$$

odkud

$$a_1 = 0 \quad \text{nebo} \quad q = 0 \quad \text{nebo} \quad q = -3 \quad \text{nebo} \quad q = 3.$$

a) $a_1 = 0$

Tato možnost nemůže nastat, pro žádné q by nebyla splněna rovnice (1).

b) $q = 0$

Z rovnice (1) dopočítáme $a_1 = 80$.

c) $q = -3$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme $a_1 \cdot \frac{81-1}{-4} = 80$, odkud $a_1 = -4$.

d) $q = 3$

Tentokrát $a_1 \cdot \frac{81-1}{2} = 80$, odkud $a_1 = 2$.

Úloha má tři řešení:

$$a_1 = 80, \quad q = 0; \quad a_1 = -4, \quad q = -3; \quad a_1 = 2, \quad q = 3$$

b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$s_n = \frac{1}{2}n(17 + 20 - 3n) = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{37}{2}n$$

c) Kvadratický výraz z bodu b) upravíme na druhou mocninu lineárního dvojčlenu:

$$\begin{aligned}s_n &= -\frac{3}{2}\left(n^2 - \frac{37}{3}n\right) = -\frac{3}{2}\left[\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 - \left(\frac{37}{6}\right)^2\right] = \\&= -\frac{3}{2}\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1369}{36} = -\frac{3}{2}\left(n - \frac{37}{6}\right)^2 + \frac{1369}{24}\end{aligned}$$

Výraz s_n má maximální hodnotu pro takové přirozené číslo n , pro které je číslo $\left(n - \frac{37}{6}\right)^2$ nejmenší, tedy pro $n = 6$. Přitom

$$s_6 = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1369}{24} = \frac{1369-1}{24} = 57.$$

Řešení úlohy 143

Kdyby bylo $q = 1$, potom by z podmínky $a_4 = 9a_2$ vyplývalo $a_1 = 0$ a součet prvních čtyř členů by nebyl 80. Proto $q \neq 1$.

Podle zadání platí

$$a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 80, \quad (1)$$

$$a_1 q^3 = 9a_1 q. \quad (2)$$

Druhou rovnici upravíme na tvar

$$a_1 q(q^2 - 9) = 0,$$

odkud

$$a_1 = 0 \quad \text{nebo} \quad q = 0 \quad \text{nebo} \quad q = -3 \quad \text{nebo} \quad q = 3.$$

a) $a_1 = 0$

Tato možnost nemůže nastat, pro žádné q by nebyla splněna rovnice (1).

b) $q = 0$

Z rovnice (1) dopočítáme $a_1 = 80$.

c) $q = -3$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme $a_1 \cdot \frac{81-1}{-4} = 80$, odkud $a_1 = -4$.

d) $q = 3$

Tentokrát $a_1 \cdot \frac{81-1}{2} = 80$, odkud $a_1 = 2$.

Úloha má tři řešení:

$$a_1 = 80, \quad q = 0; \quad a_1 = -4, \quad q = -3; \quad a_1 = 2, \quad q = 3$$

Řešení úlohy 144

Předpokládejme, že odvěsny daného pravoúhlého trojúhelníku měří a cm, b cm a jeho přepona měří c cm, kde $a < b < c$. Označíme-li d diferenci aritmetické posloupnosti, jejímiž třemi po sobě jdoucími členy jsou čísla a , b , c (v tomto pořadí), platí

$$a = b - d, \quad c = b + d, \quad d > 0.$$

Z Pythagorovy věty dostaneme

$$(b - d)^2 + b^2 = (b + d)^2, \quad \text{neboli} \quad b(b - 4d) = 0.$$

Protože $b \neq 0$, dostáváme $b = 4d$ a dále $a = 4d - d = 3d$, $c = 4d + d = 5d$.

Podmínka pro obsah znamená, že $\frac{1}{2}ab = 384$, tedy:

$$\frac{1}{2} \cdot 3d \cdot 4d = 384$$

$$d^2 = 64$$

$$d = 8$$

Odtud $b = 4d = 32$, $c = b + d = 40$.

Poloměr kružnice opsané danému pravoúhlému trojúhelníku je roven polovině délky jeho přepony, tedy 20 cm.

Řešení úlohy 145

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = 10 \cdot 2^{n-1},$$

$$b_n = \log(10 \cdot 2^{n-1}) = \log 10 + (n-1) \cdot \log 2 = 1 + (n-1) \cdot \log 2.$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy aritmetická s prvním členem 1 a diferencí $\log 2$.

b) Součet prvních deseti členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je:

$$\frac{10}{2}(1 + 1 + 9 \log 2) = 5(2 + 9 \log 2)$$

c) V oboru všech přirozených čísel máme vyřešit soustavu nerovnic

$$21 \leq 1 + (n-1) \log 2 \leq 26,$$

neboli

$$\frac{20}{\log 2} + 1 \leq n \leq \frac{25}{\log 2} + 1.$$

Protože

$$\frac{20}{\log 2} + 1 \doteq 67,44, \quad \frac{25}{\log 2} + 1 \doteq 84,05,$$

jsou uvažované nerovnice splněny právě pro ta přirozená čísla n , pro která platí $68 \leq n \leq 84$.

V intervalu $\langle 21, 26 \rangle$ leží 17 členů posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení úlohy 146

a) Vypočteme několik prvních členů dané posloupnosti:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad a_4 = \frac{1}{16}, \quad a_5 = \frac{1}{25}$$

Odhadneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{n^2}.$$

Tento vzorec dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ vzorec platí, neboť $a_1 = 1 = \frac{1}{1^2}$.

Předpokládejme, že dokazovaný vzorec platí pro $n = k$, tedy že

$$a_k = \frac{1}{k^2}.$$

S využitím tohoto indukčního předpokladu a daného rekurentního vzorce vypočteme

$$a_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 a_k = \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2},$$

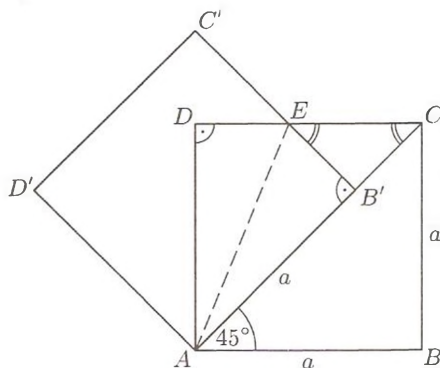
což jsme měli dokázat.

- b) Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 < 1$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_{n+1} < a_n$, což znamená, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající.
- c) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 < a_n \leq 1$, proto je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená.

6 Planimetrie

Řešení úlohy 164

Nechť například bod B' leží na úsečce AC . Označme E průsečík úseček CD a $B'C'$ (viz obrázek).



Trojúhelníky AED a AEB' jsou podle věty *Ssu* shodné. Obsah S průniku obou čtverců je proto dvojnásobkem obsahu pravoúhlého trojúhelníku $AB'E$. Platí

$$|AB'| = a, \quad |EB'| = |B'C| = |AC| - |AB'| = \sqrt{2}a - a = a(\sqrt{2} - 1),$$

a tedy

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |AB'| \cdot |EB'|\right) = a^2(\sqrt{2} - 1).$$

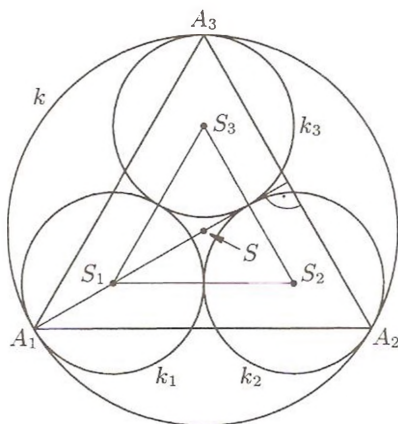
Řešení úlohy 165

- a) Trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný se stranou délky $2r$, S je jeho těžiště, proto

$$|SS_1| = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2r\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}r,$$

tedy

$$R = |SA_1| = |SS_1| + |S_1A_1| = \frac{2}{3}\sqrt{3}r + r = \frac{1}{3}(2\sqrt{3} + 3)r.$$



- b) Bod S je těžištěm a zároveň průsečíkem výšek rovnostranného trojúhelníku $A_1A_2A_3$, proto pro výšku v tohoto trojúhelníku platí

$$v = \frac{3}{2} \cdot |A_1S| = \frac{3}{2}R = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 3)r.$$

Jelikož v rovnostranném trojúhelníku $A_1A_2A_3$ platí

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot |A_1A_2|,$$

dostáváme

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot |A_1A_2| = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 3)r,$$

odkud

$$|A_1A_2| = (2 + \sqrt{3})r.$$

Řešení úlohy 166

- a) Označme a délku strany čtverce $ABCD$ (viz obrázek). Z podobnosti trojúhelníků AXL a ABC plyne

$$|AX| = |LX| = \frac{|AL|}{|AC|} \cdot a = \frac{3}{4}a,$$

proto

$$|KX| = |AX| - |AK| = \frac{1}{4}a.$$

Analogicky z podobnosti trojúhelníků CYL a CDA plyne

$$|DY| = \frac{3}{4}a, \quad |LY| = \frac{1}{4}a.$$

Protože úhly KXL a LYD jsou pravé, jsou trojúhelníky KLX a LDY shodné podle věty *sus*.

- b) Platí

$$|\angle KLD| = 180^\circ - (|\angle K LX| + |\angle YLD|).$$

Ze shodnosti trojúhelníků KLX a LDY vyplývá, že

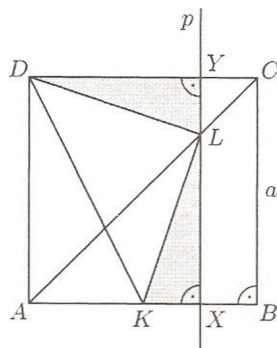
$$|\angle YLD| = |\angle XKL|,$$

proto

$$|\angle K LX| + |\angle YLD| = 180^\circ - |\angle K XL| = 90^\circ.$$

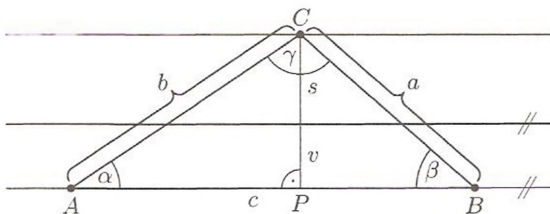
To znamená, že úhel KLD je pravý.

- c) Trojúhelník KDL je podle a) a b) pravoúhlý rovnoramenný, proto $|\angle KDL| = 45^\circ$.



Řešení úlohy 167

Proveďme označení podle obrázku.



Platí

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 104^\circ 50'.$$

Ze sinové věty pro trojúhelník ABC vypočteme

$$b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku APC dostaneme

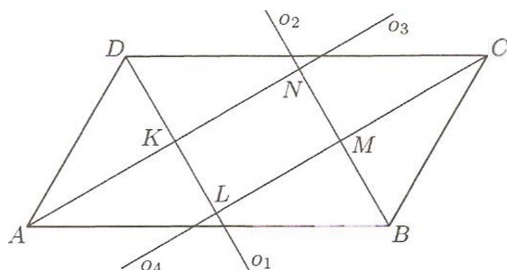
$$s + v = b \sin \alpha.$$

Nyní již snadno určíme šířku řeky:

$$\begin{aligned} s &= b \sin \alpha - v = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha - v = \\ &= \left(63 \cdot \frac{\sin 41^\circ 20'}{\sin 104^\circ 50'} \cdot \sin 33^\circ 50' - 10 \right) \text{ m} \doteq 14,0 \text{ m} \end{aligned}$$

Řešení úlohy 168

Osy o_1 a o_2 úhlů ADC a ABC jsou rovnoběžné a také osy o_3 a o_4 úhlů DAB a DCB jsou rovnoběžné. Průsečíky os označme podle obrázku.



Protože

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ADC| = 180^\circ,$$

je

$$|\sphericalangle KAD| + |\sphericalangle ADK| = 90^\circ,$$

odkud

$$|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle AKD| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Zjistili jsme, že čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník s jedním úhlem pravým, je to tedy pravoúhelník.

Jestliže rovnoběžník $ABCD$ má dané rozměry, dostaneme z pravoúhlých trojúhelníků AKD a ABN :

$$|AK| = |AD| \cdot \cos 30^\circ = \left(6 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|AN| = |AB| \cdot \cos 30^\circ = \left(12 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|KD| = |AD| \cdot \sin 30^\circ = \left(6 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

$$|BN| = |AB| \cdot \sin 30^\circ = \left(12 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$|KN| = |AN| - |AK| = (6\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$|KL| = |DL| - |KD| = |BN| - |KD| = (6 - 3) \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

Obsah obdélníku $KLMN$ je

$$|KL| \cdot |KN| = (3 \cdot 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Řešení úlohy 169

Označme c délku přepony a v výšku k přeponě trojúhelníku ABC . Jelikož středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je střed jeho přepony, platí $c = 2R$. Odtud a ze skutečnosti, že $S = \frac{1}{2}cv$, vypočteme

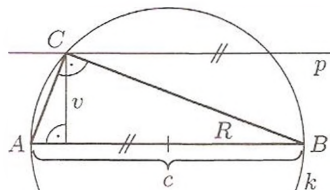
$$v = \frac{2S}{c} = \frac{2S}{2R} = \frac{S}{R}.$$

a) Rozbor:

Protože $|\angle ACB| = 90^\circ$, leží vrchol C na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem AB ; $|AB| = 2R = 6 \text{ cm}$.

Vrchol C leží také na rovnoběžce p s přímkou AB , jejíž vzdálenost od AB je

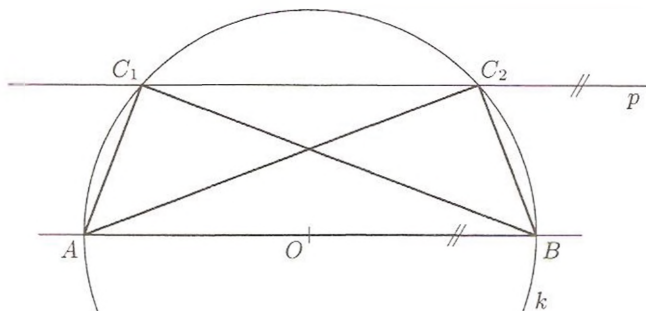
$$v = \frac{S}{R} = \frac{6 \text{ cm}^2}{3 \text{ cm}} = 2 \text{ cm}.$$



Připomeňme, že podle známé úmluvy nepovažujeme v nepolohových konstrukčních úlohách přímo shodná řešení za různá – po umístění úsečky AB se zajímáme pouze o řešení ležící v jedné z polorovin s hraniční přímkou AB .

Popis konstrukce:

1. úsečka AB ; $|AB| = 6 \text{ cm}$
2. bod O ; O je střed úsečky AB
3. kružnice k ; $k(O; 3 \text{ cm})$
4. přímka p ; $p \parallel \leftrightarrow AB$, vzdálenost p od AB je 2 cm
5. body C_1, C_2 ; $C_1, C_2 \in p \cap k$
6. $\triangle ABC_1, \triangle ABC_2$



Zkouška:

Body C_1, C_2 leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB , proto $|\angle AC_1B| = 90^\circ$, $|\angle AC_2B| = 90^\circ$.

Body C_1, C_2 leží přímce p rovnoběžné s přímkou AB , která je od AB vzdálena 2 cm , proto výšky k přeponě v trojúhelnících ABC_1 a ABC_2 mají délku 2 cm .

Obsahy obou sestrojených trojúhelníků jsou

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2.$$

Úloha má dvě řešení.

- b) Počet řešení závisí na počtu společných bodů přímky p a kružnice k .

Je-li $v > R$, tj. $S > R^2$, nemá úloha žádné řešení.

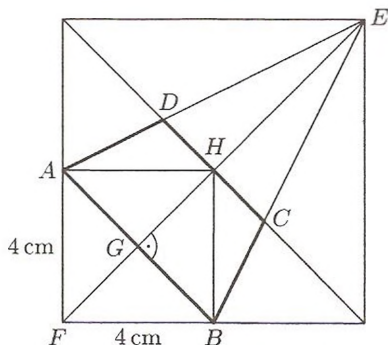
Je-li $v = R$, tj. $S = R^2$, má úloha 1 řešení.

Je-li $v < R$, tj. $S < R^2$, má úloha 2 řešení.

- c) Trojúhelník ABC je rovnoramenný právě tehdy, když $v = R$, tedy právě tehdy, když $S = R^2$.

Řešení úlohy 170

Označme některé body v daném čtverci podle obrázku:



Obsah S lichoběžníku $ABCD$ vypočteme podle vzorce

$$S = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |GH|.$$

Platí:

$$|GH| = \frac{1}{4} |EF| = \left(\frac{1}{4} \cdot 8\sqrt{2}\right) \text{ cm} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$|AB| = 2|GH| = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Trojúhelníky DCE a ABE jsou podobné, proto

$$\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|HE|}{|GE|},$$

odkud

$$|DC| = \frac{|HE| \cdot |AB|}{|GE|} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2}\right) \cdot 4\sqrt{2}}{\frac{3}{4} \cdot 8\sqrt{2}} \text{ cm} = \frac{8}{3} \sqrt{2} \text{ cm}.$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je

$$S = \left(\frac{4\sqrt{2} + \frac{8}{3}\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} \right) \text{ cm}^2 = \frac{40}{3} \text{ cm}^2.$$

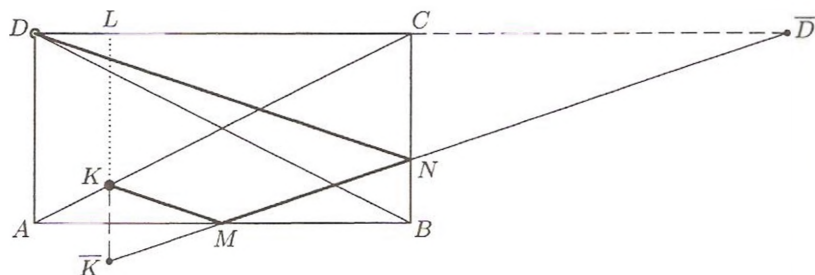
Řešení úlohy 171

Označme M bod, v němž se koule odrazí od hrany AB , a N bod, v němž se odrazí od hrany BC .

Přímky KM a MN jsou osově souměrné podle přímky AB a přímky MN a ND jsou osově souměrné podle přímky BC .

Popis konstrukce:

1. bod $\bar{K}$ osově souměrný s bodem K podle přímky AB
2. bod $\bar{D}$ osově souměrný s bodem D podle přímky BC
3. body M a N jako průsečíky přímky $\bar{K}\bar{D}$ s přímkami AB a BC
4. dráha $KMND$



Délka dráhy $KMND$ je rovna délce přepony $\bar{K}\bar{D}$ v pravoúhlém trojúhelníku $\bar{K}\bar{D}L$, kde L je průsečík přímek $\bar{K}\bar{K}$ a $D\bar{D}$:

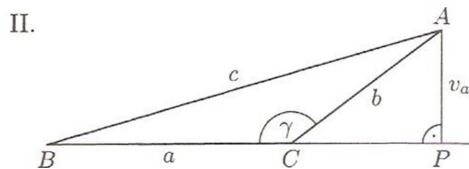
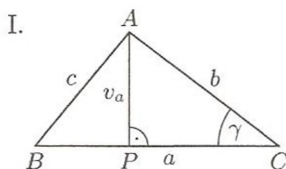
$$|\bar{K}L| = 100 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$$

$$|L\bar{D}| = |LC| + |C\bar{D}| = \frac{4}{5} \cdot 200 \text{ cm} + 200 \text{ cm} = 360 \text{ cm}$$

$$|\bar{K}\bar{D}| = \sqrt{120^2 + 360^2} \text{ cm} \doteq 379,5 \text{ cm}$$

Řešení úlohy 172

Existují dva trojúhelníky ABC , které mají dané vlastnosti:



V případě I, kdy je úhel γ ostrý a jeho kosinus kladný, vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku APC

$$\sin \gamma = \frac{v_a}{b} = \frac{3}{5},$$

odkud

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Z kosinové věty pak

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{269 - 208} \text{ cm} \doteq 7,81 \text{ cm}.$$

V případě II, kdy je úhel γ tupý a jeho kosinus záporný, postupně vypočteme:

$$\sin \gamma = \sin (180^\circ - \gamma) = \frac{3}{5}$$

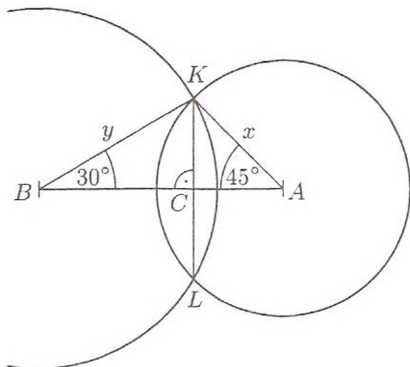
$$\cos \gamma = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$c = \sqrt{269 + 208} \text{ cm} \doteq 21,84 \text{ cm}$$

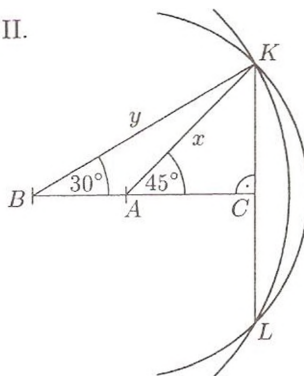
Řešení úlohy 173

Existují dvě možnosti vzájemné polohy obou kružnic:

I.



II.



V obou případech platí (označení viz obrázky):

$$|KC| = y \sin 30^\circ = x \sin 45^\circ, \quad \text{odkud} \quad y = \sqrt{2} x$$

$$|AC| = x \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} x$$

$$|BC| = y \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} y = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{6} x$$

V případě I platí

$$|AB| = |AC| + |BC|,$$

po dosazení

$$10 \text{ cm} = \frac{1}{2} \sqrt{2} x + \frac{1}{2} \sqrt{6} x,$$

odkud vypočteme

$$x = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \text{ cm} = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm},$$

$$y = \sqrt{2}x = 10(\sqrt{3} - 1) \text{ cm.}$$

V případě II platí:

$$|AB| = |BC| - |AC|$$

$$10 \text{ cm} = \frac{1}{2}\sqrt{6}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}x$$

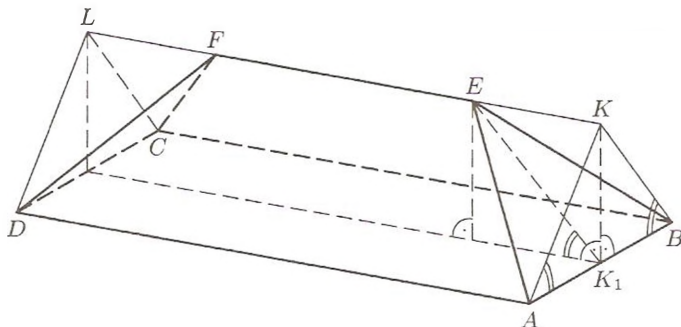
$$x = \frac{20}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \text{ cm} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

$$y = \sqrt{2}x = 10(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

7 Stereometrie

Řešení úlohy 191

Zavedme označení podle obrázku:



Jelikož střešní roviny mají sklon 45° , je

$$|AK_1| = |K_1K| = |KE| = \frac{1}{2}|AB| = 3 \text{ m.}$$

Označme V_1 objem hranolu $ABKDC$ a V_2 objem jehlanu $ABKE$. Platí:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |K_1K| \cdot |AD| = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 12\right) \text{ m}^3 = 108 \text{ m}^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |K_1K| \cdot |KE| = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3\right) \text{ m}^3 = 9 \text{ m}^3$$

Objem půdního prostoru je

$$V = V_1 - 2V_2 = (108 - 2 \cdot 9) \text{ m}^3 = 90 \text{ m}^3.$$

Řešení úlohy 192

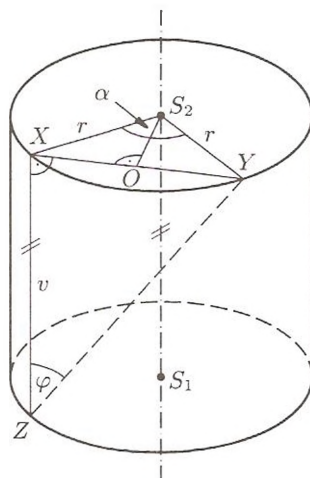
Z rovnoramenného trojúhelníku $XY S_2$, v němž O je střed základny XY , vypočteme:

$$|XY| = 2 \cdot |XO| = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha$$

Protože přímky $S_1 S_2$ a XZ jsou rovnoběžné, je odchylka přímek YZ a $S_1 S_2$ stejná jako odchylka φ přímek YZ a XZ (viz obrázek).

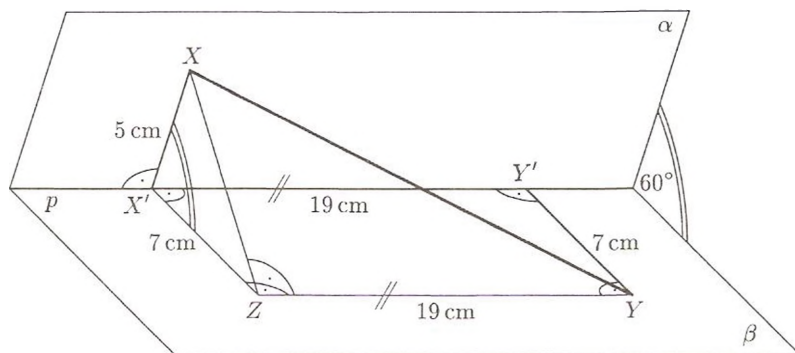
Z pravoúhlého trojúhelníku XYZ vyplývá:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|XY|}{|XZ|} = \frac{2r \sin \frac{1}{2}\alpha}{v}$$



Řešení úlohy 193

Pravoúhlý trojúhelník $X'Y'Y$ doplníme na obdélník $X'Y'YZ$ (viz obrázek).



Z trojúhelníku $XX'Z$ dostaneme pomocí kosinové věty:

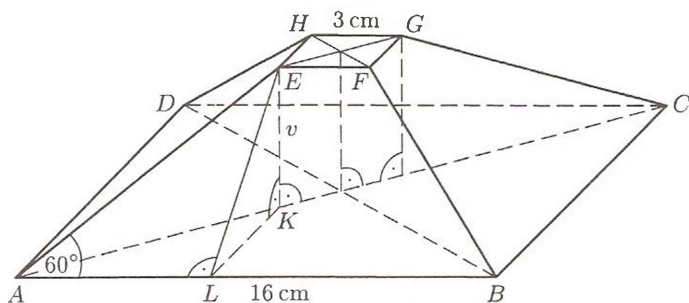
$$\begin{aligned} |XZ|^2 &= |XX'|^2 + |X'Z|^2 - 2 \cdot |XX'| \cdot |X'Z| \cdot \cos 60^\circ = \\ &= (25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}) \text{ cm}^2 = 39 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Přímka ZY' je kolmá k přímce ZX' a protože je rovnoběžná s přímkou p , je kolmá také k přímce XX' . Proto je kolmá k rovině $XX'Z$, tedy i k přímce ZX . Z pravoúhlého trojúhelníku XYZ pomocí Pythagorovy věty vypočteme:

$$\begin{aligned} |XY|^2 &= |YZ|^2 + |XZ|^2 = (19^2 + 39) \text{ cm}^2 = 400 \text{ cm}^2 \\ |XY| &= 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Řešení úlohy 194

Označme L patu kolmice sestrojené z vrcholu E k podstavní hraně AB a K patu kolmice sestrojené z vrcholu E k podstavě $ABCD$ (viz obrázek).



Z pravoúhlého trojúhelníku ALE vypočteme délku boční hrany AE :

$$|AE| = \frac{|AL|}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(|AB| - |EF|)}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(16 - 3)}{\frac{1}{2}} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

Pro délku úsečky AK platí:

$$|AK| = \frac{1}{2}(|AC| - |EG|) = \frac{1}{2}(16\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) \text{ cm} = \frac{13}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

Výšku v daného komolého jehlanu vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku AKE :

$$v = |KE| = \sqrt{|AE|^2 - |AK|^2} = \sqrt{169 - \frac{169}{2}} \text{ cm} = \frac{13}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

Objem komolého jehlanu $ABCDEFGH$ je:

$$V = \frac{1}{3}v(a^2 + ab + b^2) = \frac{13}{6}\sqrt{2}(16^2 + 16 \cdot 3 + 3^2) \text{ cm}^3 = \frac{4069}{6}\sqrt{2} \text{ cm}^3 \doteq 959 \text{ cm}^3$$

Řešení úlohy 195

Do kádinky s průřezem o obsahu πR_0^2 napršela voda o objemu $\pi R_0^2 h_0$.

Do odměrky s horním průřezem o obsahu πR_1^2 proto napršela voda o objemu $\pi R_1^2 h_0$. Voda v odměrce zaujala tvar rotačního kuželu, jeho výšku označíme h_1 a poloměr podstavy r_1 . Jelikož

$$\frac{r_1}{h_1} = \frac{R_1}{v_1},$$

platí

$$r_1 = \frac{h_1 R_1}{v_1}$$

a po dosazení do rovnosti objemů

$$\pi R_1^2 h_0 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1$$

dostaneme

$$\pi R_1^2 h_0 = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{h_1^2 R_1^2}{v_1^2} \cdot h_1,$$

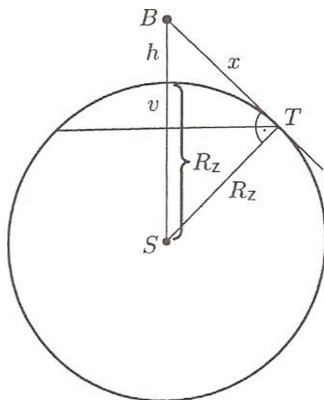
odkud

$$h_1 = \sqrt[3]{3h_0 v_1^2}.$$

Řešení úlohy 196

Střed Země označme S a místo, v němž se nachází balón, označme B . Bodem B vedme libovolnou tečnu k povrchu Země, dotykový bod označme T .

Na obrázku je znázorněn řez Země rovinou BST .



- a) Maximální vzdálenost od balónu, z níž je možné z povrchu Země balón pozorovat, je rovna délce x úsečky BT . Vypočítáme ji pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku BST :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(R_Z + h)^2 - R_Z^2} = \sqrt{2R_Z h + h^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 6378 \cdot 2 + 4} \text{ km} \doteq 160 \text{ km} \end{aligned}$$

- b) Zemský povrch viditelný z balónu má tvar kulového vrchlíku. Jeho výšku v vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku BST pomocí Euklidovy věty o odvěsně:

$$\begin{aligned} x^2 &= (R_Z + h) \cdot (h + v) \\ 2R_Z h + h^2 &= R_Z h + h^2 + R_Z v + hv \\ R_Z h &= v(R_Z + h) \\ v &= \frac{R_Z h}{R_Z + h} \end{aligned}$$

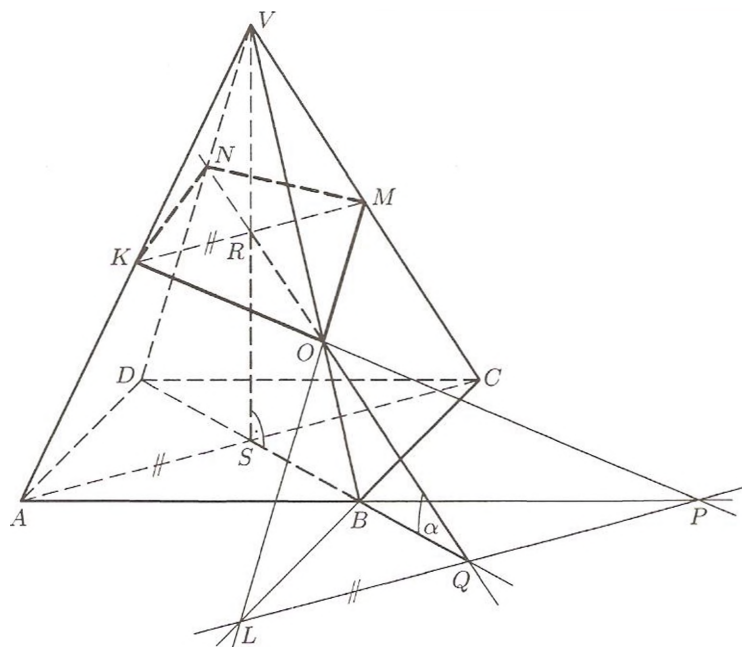
Obsah uvažovaného kulového vrchlíku je:

$$2\pi R_Z v = 2\pi \frac{R_Z^2 h}{R_Z + h} = 2\pi \frac{6378^2 \cdot 2}{6378 + 2} \text{ km}^2 \doteq 80\,123 \text{ km}^2.$$

Řešení úlohy 197

a) Popis konstrukce řezu (viz obrázek):

1. průsečík O přímek ML , VB
2. průsečík P přímek AB , KO
3. průsečík Q přímek DB , LP
4. průsečík N přímek DV , QO
5. řez $KOMN$



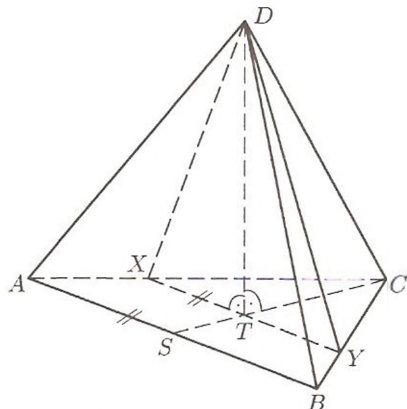
b) Kolmým průřezem přímky RQ do roviny ABC je přímka SQ . Proto je odchylka rovin ABC a KLM rovna velikosti úhlu $\alpha = \angle SQR$, kde S je střed podstavy $ABCD$ daného jehlanu a R průsečík přímek NQ a KM . Trojúhelníky APK a CLM jsou shodné, $|CB| = |BL|$, proto také $|AB| = |BP|$. Tedy trojúhelníky LBP a ABC jsou shodné podle věty *sus* a $|QB| = |SB|$. Velikost úhlu α vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku SQR :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|SR|}{|SQ|} = \frac{\frac{1}{2}|SV|}{2|SB|} = \frac{\frac{1}{2}v}{\sqrt{2}a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5,5}{\sqrt{2} \cdot 4,5} = \frac{11\sqrt{2}}{36} \doteq 0,43212$$

$$\alpha \doteq 23^{\circ}22'$$

Řešení úlohy 198

- a) Řezem čtyřstěnu $ABCD$ rovinou α je trojúhelník XYD , jeho strana XY je rovnoběžná s přímkou AB . Protože kolmým průmětem bodu D do roviny ABC je těžiště T trojúhelníku ABC , platí $T \in XY$. Označme S střed úsečky AB (viz obrázek).



Trojúhelníky XYC a ABC jsou podobné s koeficientem podobnosti

$$k = \frac{|TC|}{|SC|} = \frac{2}{3},$$

proto

$$|XY| = \frac{2}{3} \cdot |AB| = \frac{2}{3}a.$$

Výška z vrcholu D trojúhelníku XYD je úsečka TD , její délku vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku TCD :

$$|TD| = \sqrt{|CD|^2 - |TC|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}a$$

Obsah trojúhelníku XYD je

$$\frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot |TD| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}a\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{6}a\right) = \frac{1}{9}\sqrt{6}a^2.$$

- b) Označme V_1 objem čtyřstěnu $XYCD$ a V_2 objem čtyřstěnu $ABCD$. Protože oba čtyřstěny mají stejnou výšku z vrcholu D , platí

$$V_1 : V_2 = S_1 : S_2,$$

kde S_1 je obsah trojúhelníku XYC a S_2 je obsah trojúhelníku ABC .

Platí

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{4}{9},$$

proto

$$V_1 : V_2 = 4 : 9.$$

Řešení úlohy 199

Poloměr dané koule označme r . Její povrch je

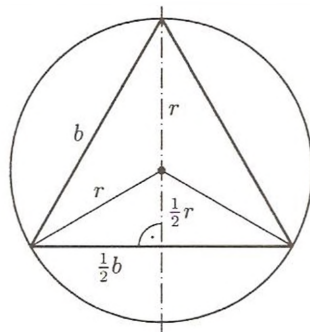
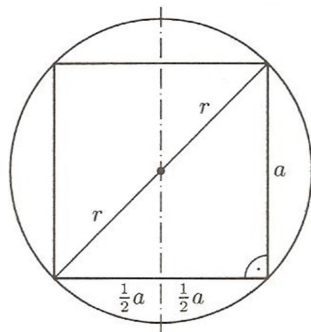
$$S_1 = 4\pi r^2.$$

Délku strany čtverce, který je osovým řezem uvažovaného rovnostranného válce, označme a (viz obrázek vlevo). Platí

$$a^2 + a^2 = (2r)^2, \quad \text{tedy} \quad a^2 = 2r^2.$$

Povrch válce je

$$S_2 = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{3}{2}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi \cdot 2r^2 = 3\pi r^2.$$



Délku strany rovnostranného trojúhelníku, který je osovým řezem uvažovaného rovnostranného kuželu, označme b (viz obrázek vpravo). Platí

$$\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2, \quad \text{tedy} \quad b^2 = 3r^2.$$

Povrch kuželu je

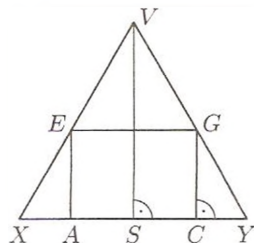
$$S_3 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \pi \cdot \frac{1}{2}b \cdot b = \frac{3}{4}\pi b^2 = \frac{3}{4}\pi \cdot 3r^2 = \frac{9}{4}\pi r^2.$$

Z vypočtených hodnot vyplývá, že

$$\sqrt{S_1 S_3} = \sqrt{4\pi r^2 \cdot \frac{9}{4}\pi r^2} = 3\pi r^2 = S_2.$$

Řešení úlohy 200

Na obrázku je řez daného kuželu rovinou ACE . Protože rovina ACE obsahuje osu kuželu, je tímto řezem rovnostranný trojúhelník, jehož jedním vrcholem je vrchol V kuželu, další dva vrcholy jsou označeny X, Y . Vrcholy A, C, E, G krychle leží na stranách trojúhelníku XYV , středem strany XY je střed S podstavy daného kuželu.



Délku hrany krychle $ABCDEFGH$ označme a . Platí

$$\begin{aligned} |SY| &= r, & |SV| &= r\sqrt{3}, & |CG| &= a, & |AC| &= a\sqrt{2}, & |SC| &= \frac{1}{2}a\sqrt{2}, \\ |CY| &= |SY| - |SC| = r - \frac{1}{2}a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Z podobných trojúhelníků $G CY$ a $V SY$ postupně vypočteme:

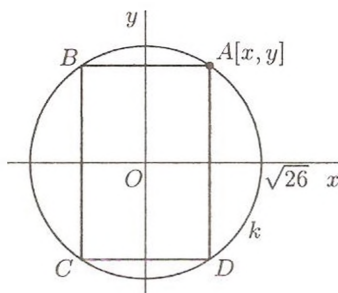
$$\begin{aligned}\frac{|GC|}{|CY|} &= \frac{|VS|}{|SY|} \\ \frac{a}{r - \frac{1}{2}a\sqrt{2}} &= \frac{r\sqrt{3}}{r} \\ a &= r\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{6} \\ a(\sqrt{6} + 2) &= 2r\sqrt{3} \\ a &= \frac{2r\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 2} \\ a &= r\sqrt{3}(\sqrt{6} - 2) \\ a &= r(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\end{aligned}$$

8 Analytická geometrie

Řešení úlohy 223

Daný pravoúhelník označme $ABCD$, $A[x, y]$ nechť je jeho vrchol ležící v prvním kvadrantu, tj. $x > 0$, $y > 0$ (viz obrázek). Protože bod A leží na kružnici k a obsah pravoúhelníku $ABCD$ je 48, platí pro souřadnice x , y bodu A současně

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 26, \\ (2x) \cdot (2y) &= 48.\end{aligned}$$



Z druhé rovnice vyjádříme $y = \frac{12}{x}$, dosadíme do první rovnice a postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 &= 26 \\ x^4 - 26x^2 + 144 &= 0 \\ (x^2)^2 - 26x^2 + 144 &= 0 \\ (x^2 - 8)(x^2 - 18) &= 0 \\ x = 2\sqrt{2} \quad \text{nebo} \quad x = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Úloha má dvě řešení:

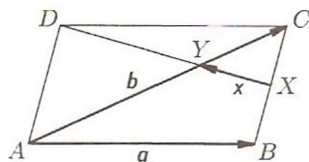
$$\begin{aligned}A_1[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}], B_1[-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}], C_1[-2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}], D_1[2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}]; \\ A_2[3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], B_2[-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], C_2[-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}], D_2[3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}]\end{aligned}$$

Řešení úlohy 224

Platí (viz obrázek):

$$D - A = C - B = b - a$$

$$\begin{aligned} D - X &= (C - X) + (D - C) = \\ &= \frac{1}{2}(C - B) - (B - A) = \\ &= \frac{1}{2}(b - a) - a = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

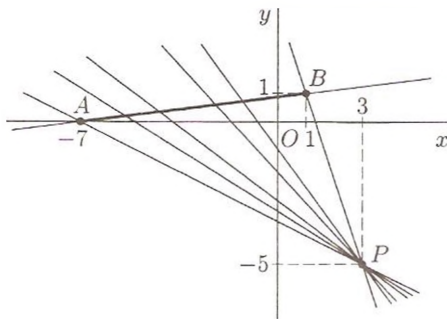


Jelikož jsou trojúhelníky XYC a DYA podobné a $|XC| = \frac{1}{2}|AD|$, platí

$$x = Y - X = \frac{1}{3}(D - X) = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b\right) = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b.$$

Řešení úlohy 225

Protože bod P neleží na přímce AB , má každá přímka požadovaných vlastností s úsečkou AB společný právě jeden bod, a protože rovnoběžka s osou y procházející bodem P úsečku AB neprotíná, lze každou takovou přímku vyjádřit rovnicí ve směrnicovém tvaru. Všech přímek požadovaných vlastností je nekonečně mnoho, vytvářejí „svazek“ přímek – šest přímek tohoto svazku je zakresleno na obrázku.



Zkoumejme, kdy má přímka $y = kx + q$ požadované vlastnosti.

Tato přímka prochází bodem P právě tehdy, když platí

$$-5 = k \cdot 3 + q, \quad \text{tj.} \quad q = -3k - 5.$$

Má tedy rovnici

$$y = kx - (3k + 5). \quad (*)$$

Zbývá zjistit, pro které hodnoty parametru k má přímka $(*)$ společný bod s úsečkou AB .

Snadno vypočteme, že směrnice přímky BP je -3 a směrnice přímky AP je $-\frac{1}{2}$. „Spojitěmu“ zvětšování směrnice k v rovnici $(*)$ od hodnoty $k = -3$ po hodnotu $k = -\frac{1}{2}$ odpovídá otáčení proti směru pohybu hodinových ručiček kolem bodu P přímky, která tímto bodem prochází, od počáteční polohy – přímky BP po koncovou polohu – přímku AP . Přímka $(*)$ má proto společný bod s úsečkou AB právě tehdy, když $k \in \langle -3, -\frac{1}{2} \rangle$.

Parametrický systém rovnic všech přímek požadovaných vlastností je

$$y = kx - (3k + 5), \quad k \in \langle -3, -\frac{1}{2} \rangle.$$

Řešení úlohy 226

Množina všech bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od bodů A a B , je rovina souměrnosti σ úsečky AB . Tato rovina prochází bodem $S = \frac{1}{2}(A + B) = [0, 1, 3]$ a jejím normálovým vektorem je vektor $n = A - B = (2, 2, 4)$. Rovnice roviny σ má tvar $2x + 2y + 4z + d = 0$, po dosazení souřadnic bodu S vypočteme $d = -14$. Rovnice roviny σ tedy je

$$2x + 2y + 4z - 14 = 0, \quad \text{po úpravě} \quad x + y + 2z - 7 = 0.$$

Nyní vypočteme souřadnice průsečíku C přímky p a roviny σ :

$$(4 + t) + (3 + 2t) + 2(-2 - t) - 7 = 0, \quad \text{odkud} \quad t = 4$$

$$x = 4 + t = 8, \quad y = 3 + 2t = 11, \quad z = -2 - t = -6$$

Hledaný bod je $C[8, 11, -6]$, přičemž

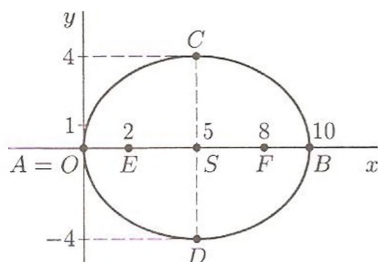
$$|AC| = \sqrt{(8-1)^2 + (11-2)^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{251}.$$

Řešení úlohy 227

- a) Bod S je středem úseček AB a EF , proto $B[10, 0]$ a $F[8, 0]$. Platí

$$b^2 = a^2 - e^2,$$

kde $a = 5$ a $e = |SE| = 3$, proto $b = 4$, takže $C[5, 4]$ a $D[5, -4]$ (viz obrázek).



- b) Rovnice elipsy se středem $S[5, 0]$, jejíž hlavní osou je osa x , vedlejší osou přímka $x = 5$, hlavní poloosa $a = 5$ a vedlejší poloosa $b = 4$, je

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{po úpravě} \quad 16x^2 + 25y^2 - 160x = 0.$$

- c) Rovnice přímky AC je $y = \frac{4}{5}x$, každá přímka t s ní rovnoběžná je dána rovnicí $y = \frac{4}{5}x + q$. Pro x -ové souřadnice společných bodů přímky t a dané elipsy platí

$$16x^2 + 25\left(\frac{4}{5}x + q\right)^2 - 160x = 0, \quad \text{neboli} \quad 32x^2 + 4(q-4)x + 25q^2 = 0.$$

Přímka t je tečnou elipsy právě tehdy, když diskriminant poslední kvadratické rovnice je roven nule, tj. $1600 \cdot [(q-4)^2 - 25q^2] = 0$, odkud vypočteme $q_1 = 4(\sqrt{2} - 1)$, $q_2 = -4(\sqrt{2} + 1)$. Existují dvě tečny t_1, t_2 dané elipsy, které mají požadované vlastnosti:

$$t_1: y = \frac{4}{5}x + 4(\sqrt{2} - 1), \quad t_2: y = \frac{4}{5}x - 4(\sqrt{2} + 1)$$

Řešení úlohy 228

a) Rovnici dané hyperboly upravíme na středový tvar:

$$x^2 - 6x - 4y^2 - 16y - 11 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 4$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{1} = 1$$

Středem hyperboly je bod $S[3, -2]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x ,

$$\text{hlavní poloosa: } a = 2$$

$$\text{vedlejší poloosa: } b = 1$$

$$\text{excentricita: } e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$$

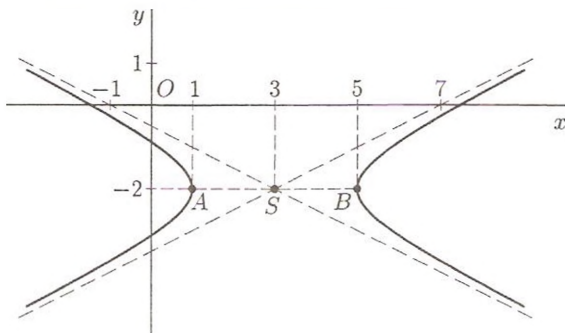
$$\text{ohniska: } E[3 - \sqrt{5}, -2], F[3 + \sqrt{5}, -2]$$

$$\text{vrcholy: } A[1, -2], B[5, -2]$$

Asymptoty dané hyperboly jsou přímky o směrnících $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{2}$ procházející jejím středem. Rovnice asymptot:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Hyperbola je znázorněna na obrázku:



b) Bod $T[5, y_0]$ leží na dané hyperbole právě tehdy, když $y_0 = -2$, jde tedy o vrchol hyperboly $T[5, -2]$. Z přímek procházejících bodem T mají s danou hyperbolou společný právě jeden bod jednak tečna hyperboly v bodě T , jednak přímky rovnoběžné s asymptotami. Rovnice těchto přímek:

$$x = 5, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Řešení úlohy 229

Bod $X[x, y]$ má dvakrát větší vzdálenost od bodu $A[0, 0]$ než od bodu $B[6, 0]$ právě tehdy, když:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 6)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 4(x^2 - 12x + 36 + y^2)$$

$$x^2 - 16x + y^2 + 48 = 0$$

Hledané body jsou společné body kružnice $k: x^2 - 16x + y^2 + 48 = 0$ a přímky p . Z rovnice přímky p vyjádříme

$$x = 2y + 4$$

a dosadíme do rovnice kružnice k :

$$(2y + 4)^2 - 16(2y + 4) + y^2 + 48 = 0$$

$$5y^2 - 16y = 0$$

$$y(y - \frac{16}{5}) = 0$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{16}{5}$$

$$x_1 = 2 \cdot 0 + 4 = 4, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{16}{5} + 4 = \frac{52}{5}$$

Podmínky úlohy splňují právě dva body, a to $X_1[4, 0]$, $X_2[\frac{52}{5}, \frac{16}{5}]$.

Řešení úlohy 230

a) Rovina α je určena například bodem $A[0, 2, -1]$ a vektory

$$u = B - A = (1, -1, 2) \quad \text{a} \quad v = C - A = (4, 4, 3).$$

Pro normálový vektor $n = (a, b, c)$ roviny α platí

$$n \cdot u = 0 \quad \text{a zároveň} \quad n \cdot v = 0.$$

Podmínky

$$a - b + 2c = 0 \quad \text{a} \quad 4a + 4b + 3c = 0$$

splňuje například vektor $n = (a, b, c) = (11, -5, -8)$. Obecnou rovnici roviny α tedy můžeme psát ve tvaru

$$11x - 5y - 8z + d = 0.$$

Z podmínky $A \in \alpha$ vypočteme $d = 2$.

Obecná rovnice roviny α je $11x - 5y - 8z + 2 = 0$.

b) Aby $ABCD$ byl rovnoběžník, musí platit $D - A = C - B$, tj.

$$D = A + (C - B) = [0, 2, -1] + (3, 5, 1) = [3, 7, 0].$$

c) Platí

$$u = B - A = (1, -1, 2), \quad w = C - B = (3, 5, 1).$$

Protože

$$u \cdot w = (B - A) \cdot (C - B) = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 0,$$

jsou vektory $u = B - A$ a $w = C - B$ navzájem kolmé a rovnoběžník $ABCD$ je pravoúhelník. Délky jeho stran jsou

$$|AB| = |B - A| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6},$$

$$|BC| = |C - B| = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}.$$

Protože $|AB| \neq |BC|$, jde o obdélník; jeho obsah je

$$S = |AB| \cdot |BC| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{35} = \sqrt{210}.$$

Řešení úlohy 231

- a) Bod A je průsečík přímek p_1 a u_1 , jeho souřadnice dostaneme vyřešením soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcl} x - 7y & = & 0 \\ 2x + y & = & 15 \\ \hline x & = & 7y \\ 2 \cdot 7y + y & = & 15 \\ \hline y & = & 1, \quad x = 7 \end{array}$$

Vrcholem A je tedy bod $A[7, 1]$.

Podobně vypočteme souřadnice bodu C , který je průsečíkem přímek p_2 a u_1 . Vyjde $C[5, 5]$.

Přímka u_2 , na níž leží úhlopříčka BD , je kolmá k přímce u_1 , má proto rovnici $x - 2y + c = 0$. Přímka u_2 dále prochází středem $S = \frac{1}{2}(A + C) = [6, 3]$ uvažovaného kosočtverce, odkud vyjde $c = 0$. Tedy $u_2: x - 2y = 0$.

Bod B zjistíme jako průsečík přímek p_1 a u_2 a bod D jako průsečík přímek p_2 a u_2 . Vyjde $B[0, 0]$, $D[12, 6]$.

- b) Obsah kosočtverce $ABCD$ je

$$\frac{1}{2} (|AC| \cdot |BD|) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(5-7)^2 + (5-1)^2} \cdot \sqrt{12^2 + 6^2} = 30$$

Řešení úlohy 232

- a) Zvolíme-li za parametr t číselnou hodnotu času v hodinách měřeného od počátku monitorování, je parametrické vyjádření obrazu dráhy první lodi

$$X = A + t \cdot (A' - A),$$

neboli

$$x = 10 + 20t, \quad y = 10t,$$

a parametrické vyjádření obrazu dráhy druhé lodi

$$X = B + t \cdot (B' - B),$$

čili

$$x = 180 - 10t, \quad y = 10 + 20t.$$

Lodě by se srazily, pokud by v některém čase t hodin byly ve stejném místě, tj. kdyby soustava rovnic

$$10 + 20t = 180 - 10t, \quad 10t = 10 + 20t$$

měla řešení. Z první rovnice vyjde $t = \frac{17}{3}$, z druhé rovnice $t = -1$. Lodě se proto nesrazí.

- b) Vzdálenost obrazů lodí v čase t hodin je

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[(180 - 10t) - (10 + 20t)]^2 + [(10 + 20t) - 10t]^2} \text{ mm} = \\ &= 10\sqrt{(17 - 3t)^2 + (1 + t)^2} \text{ mm} = 10\sqrt{10t^2 - 100t + 290} \text{ mm} = \\ &= 10\sqrt{10(t - 5)^2 + 40} \text{ mm} \end{aligned}$$

Tato vzdálenost je nejmenší, pokud $t = 5$, tedy za 5 hodin od počátku monitorování.

Nejmenší vzdálenost obrazů lodí je

$$10\sqrt{10(5-5)^2 + 40} \text{ mm} = 10\sqrt{40} \text{ mm} \doteq 63,25 \text{ mm}.$$

Protože pohyb lodí je na obrazovce znázorňován v měřítku $1 : 1\,000\,000$, je nejmenší vzdálenost lodí

$$10^6 \cdot 10\sqrt{40} \text{ mm} \doteq 63,25 \text{ km}.$$

Řešení úlohy 233

- a) Středem hyperboly h je bod $S[0, 150]$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x , vedlejší osa je rovnoběžná s osou y , hlavní poloosa $a = 24$ (viz obrázek). Rovnice hyperboly h je tedy

$$\frac{x^2}{24^2} - \frac{(y - 150)^2}{b^2} = 1.$$

Protože na hyperbole h leží bod $M[25, 171]$, platí:

$$\begin{aligned} \frac{25^2}{24^2} - \frac{(171 - 150)^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 &= \frac{21^2 \cdot 24^2}{49} = 72^2 \end{aligned}$$

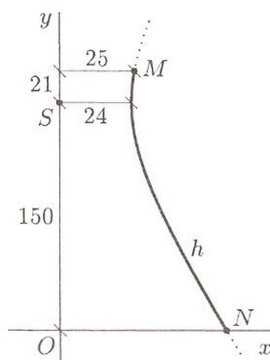
Hyperbola h má rovnici

$$\frac{x^2}{24^2} - \frac{(y - 150)^2}{72^2} = 1.$$

- b) Máme vypočítat x -ovou souřadnici bodu $N[x, 0]$, $x > 0$, ležícího na hyperbole h . Platí pro ni:

$$\begin{aligned} x^2 &= 24^2 \left(1 + \frac{150^2}{72^2} \right) = 24^2 + 24^2 \cdot \frac{150^2}{72^2} = 24^2 + 50^2 = 3\,076 \\ x &= \sqrt{3\,076} \doteq 55,46 \end{aligned}$$

Vnější poloměr pláště věže při zemi je přibližně 55,46 m.



9 Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Řešení úlohy 245

- a) Nechť A je jev, že první student vytáhne obávanou otázku. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$P(A) = \frac{\text{počet obávaných otázek}}{\text{počet všech otázek}} = \frac{4}{30} \doteq 0,133.$$

- b) Nechť B je jev, že druhý student vytáhne obávanou otázku, jestliže již jednu obávanou otázku vytáhl první student. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$P(B) = \frac{3}{29} \doteq 0,103.$$

- c) Nechť C je jev, že čtvrtý student vytáhne obávanou otázku, jestliže před ním ještě nikdo obávanou otázku nevytáhl. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$P(C) = \frac{4}{27} \doteq 0,148.$$

- d) Nechť D je jev, že obávanou otázku vytáhne aspoň jeden z prvních čtyř studentů. Opačný jev D' je jev, že obávanou nevytáhne ani jeden z nich. První student nevytáhne obávanou otázku s pravděpodobností $\frac{26}{30}$, druhý student pak s pravděpodobností $\frac{25}{29}$ atd. Proto

$$P(D) = 1 - P(D') = 1 - \frac{26}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{24}{28} \cdot \frac{23}{27} \doteq 0,454.$$

Řešení úlohy 246

- a) Všechny 4 stromy každého druhu mají být zasazeny vždy do stejné řady. Tři druhy stromů lze rozmístit do tří řad $3!$, tj. 6 způsoby.
- b) Tuto podmínku nelze splnit. Kdyby sadař osázel dvě řady stromy stejného druhu, zbyly by mu i do třetí řady stromy stejného druhu.
- c) Jednu řadu lze vybrat třemi způsoby a do ní vždy zasadit jeden ze tří druhů stromů, což dává $3 \cdot 3$ možností. Do zbývajících dvou řad lze v každém z těchto případů $\binom{8}{4}$ způsoby zasadit stromy dalšího druhu, musíme však vyloučit dva případy, kdy by všechny čtyři stromy tohoto druhu byly v téže řadě. Na stromy posledního druhu zbudou vždy poslední čtyři místa. Těchto možností je tedy

$$3 \cdot 3 \cdot \left[\binom{8}{4} - 2 \right] = 612.$$

- d) Od počtu všech možných osázení dvanácti míst třemi čtveřicemi stromů, kterých je $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$, je třeba odečíst počet případů, kdy je aspoň jedna řada osázena stromy stejného druhu, tj. výsledky z částí a) až c). Počet možností tedy tentokrát je

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} - 3! - 3 \cdot 3 \cdot \left[\binom{8}{4} - 2 \right] = 34\,032.$$

Řešení úlohy 247

- a) Z každého vrcholu konvexního n -úhelníku „vychází“ $(n-3)$ úhlopříček. Sečteme-li počty úhlopříček vycházejících z jednotlivých vrcholů, dostaneme číslo $n(n-3)$, v němž je každá úhlopříčka započítána dvakrát. Počet úhlopříček v konvexním n -úhelníku je tedy $\frac{1}{2}n(n-3)$.
- b) Počty stran daných mnohoúhelníků označme m a n . Z podmínek zadání dostaneme s využitím výsledku z části a) pro m a n soustavu rovnic

$$\begin{aligned} m + n &= 14, \\ \frac{1}{2}m(m-3) + \frac{1}{2}n(n-3) &= 29. \end{aligned}$$

Jestliže z první rovnice vyjádříme $m = 14 - n$ a dosadíme do druhé rovnice, získáme po úpravě kvadratickou rovnici

$$n^2 - 14n + 48 = 0,$$

která má kořeny $n_1 = 8$, $n_2 = 6$. Pro $n_1 = 8$ vyjde $m_1 = 6$, pro $n_2 = 6$ vyjde $m_2 = 8$.

Jedná se o šestiúhelník a osmiúhelník.

Řešení úlohy 248

- a) Průměrná cena 1 kg mraženého kuřete je

$$\frac{59,9 + 59,9 + 56,9 + 56,9 + 59,9 + 55,9 + 58,9 + 58,9}{8} \text{ Kč} = 58,40 \text{ Kč}.$$

Průměrná cena 1 kg poličanu je 196 Kč.

Průměrná cena 1 litru polotučného mléka je 11,45 Kč.

- b) Ceny 1 kg poličanu srovnáme podle velikosti:

159 Kč, 183 Kč, 185 Kč, 199 Kč, 209 Kč, 209 Kč, 209 Kč, 215 Kč

Medián je $\frac{1}{2}(199 + 209)$ Kč, tj. 204 Kč.

Modus je 209 Kč.

- c) Nejlevněji nakoupíme v prodejně F, kde jsou nejlevnější všechny tři druhy zboží.

Řešení úlohy 249

Při hodu dvěma kostkami existuje $6^2 = 36$ různých možností, pro právě 6 z nich je uvažovaný součet roven 7 ($7 = 6 + 1 = 1 + 6 = 5 + 2 = 2 + 5 = 4 + 3 = 3 + 4$). Proto

$$a = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pro výběr dvou karet z 32 je $\binom{32}{2}$ možností, při $4 \cdot \binom{8}{2}$ z nich dostaneme 2 karty téže barvy. Proto

$$b = \frac{4 \cdot \binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{31}.$$

Mezi všemi devadesáti dvojcifernými čísly je právě $\frac{100}{4} - 3 = 22$ čísel dělitelných čtyřmi, proto

$$c = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}.$$

Platí $\frac{1}{6} < \frac{7}{31} < \frac{11}{45}$, proto $a < b < c$.

Řešení úlohy 250

a) Aritmetický průměr původních hodnot:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{1\,000}}{1\,000}$$

Aritmetický průměr zvětšených hodnot:

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + 5) + (x_2 + 5) + \dots + (x_{1\,000} + 5)}{1\,000} = \\ & = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{1\,000}}{1\,000} + \frac{1\,000 \cdot 5}{1\,000} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{1\,000}}{1\,000} + 5 \end{aligned}$$

Aritmetický průměr se zvětší o 5.

b) Medián původních hodnot:

$$\frac{x_{500} + x_{501}}{2}$$

Medián zvětšených hodnot:

$$\frac{(x_{500} + 5) + (x_{501} + 5)}{2} = \frac{x_{500} + x_{501}}{2} + 5$$

Medián se zvětší o 5.

c) Jestliže největší četnost měla původně hodnota znaku x pro určité jednotky, pak po zvětšení všech hodnot o 5 bude mít největší četnost (stejnou) opět hodnota znaku x pro tytéž jednotky – tato hodnota však bude o 5 větší.

Modus se zvětší o 5.

d) Původní aritmetický průměr označme $\bar{x}$.

Původní směrodatná odchylka:

$$\sqrt{\frac{1}{1\,000} \cdot \sum_{i=1}^{1\,000} (x_i - \bar{x})^2}$$

Nová směrodatná odchylka:

$$\sqrt{\frac{1}{1\,000} \cdot \sum_{i=1}^{1\,000} [(x_i + 5) - (\bar{x} + 5)]^2} = \sqrt{\frac{1}{1\,000} \cdot \sum_{i=1}^{1\,000} (x_i - \bar{x})^2}$$

Směrodatná odchylka se nezmění.

Provázanost Sbírky úloh s Katalogem

V následujícím přehledu jsou uvedeny tematické okruhy, které jsou předmětem ověřování v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky (vyšší úroveň obtížnosti). Kódy, které jsou přiřazeny k jednotlivým úlohům ve sbírce, odpovídají tomuto členění, tzn. i členění, které je uvedeno v katalogu požadavků. Konkrétní specifické cíle, které jsou jednotlivými úlohami naplňovány, lze vyhledat v příslušné kapitole Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky.

1. Číselné množiny

- 1.1 Přirozená čísla
- 1.2 Celá čísla
- 1.3 Racionální čísla
- 1.4 Reálná čísla
- 1.5 Komplexní čísla

2. Algebraické výrazy

- 2.1 Mnohočleny
- 2.2 Lomené výrazy
- 2.3 Výrazy s mocninami a odmocninami

3. Rovnice a nerovnice

- 3.1 Lineární rovnice a jejich soustavy
- 3.2 Kvadratické rovnice
- 3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou
- 3.4 Lineární a kvadratické nerovnice a jejich soustavy

4. Funkce

- 4.1 Základní poznatky o funkcích
- 4.2 Lineární funkce
- 4.3 Kvadratické funkce
- 4.4 Mocninné funkce
- 4.5 Lineární lomené funkce
- 4.6 Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice
- 4.7 Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

5. Posloupnosti

- 5.1 Základní poznatky o posloupnostech
- 5.2 Aritmetická posloupnost
- 5.3 Geometrická posloupnost
- 5.4 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe

6. Planimetrie

- 6.1 Planimetrické pojmy a poznatky
- 6.2 Trojúhelníky
- 6.3 Mnohoúhelníky
- 6.4 Kružnice a kruh
- 6.5 Geometrická zobrazení

7. Stereometrie

- 7.1 Polohové vlastnosti útvarů v prostoru
- 7.2 Metrické vlastnosti útvarů v prostoru
- 7.3 Tělesa

8. Analytická geometrie

- 8.1 Souřadnice bodu a vektoru v rovině i v prostoru
- 8.2 Přímka a rovina
- 8.3 Kuželosečky

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

- 9.1 Kombinatorika
- 9.2 Pravděpodobnost
- 9.3 Statistika



DOPORUČENO CENTREM PRO REFORMU MATURITNÍ ZKOUŠKY

MATEMATIKA

SBÍRKA ÚLOH
PRO SPOLEČNOU
ČÁST
MATURITNÍ
ZKOUŠKY

VYŠŠÍ
OBTÍŽNOST

TAURIS



ÚSTAV PRO INFORMACE VE VZDĚLÁVÁNÍ