

1 ČÍSELNÉ MNOŽINY

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 1

1.3*

Průměrná hmotnost dvou melounů je 2,4 kg, průměrná hmotnost jiných tří melounů je 2,8 kg. Průměrná hmotnost všech pěti melounů je:

A/ 2,56 kg B/ 2,60 kg C/ 2,64 kg D/ 2,68 kg E/ 2,72 kg

Úloha 2

1.1

Které z následujících tvrzení platí?

A/ Součet dvou lichých čísel a jednoho sudého čísla je číslo liché.

B/ Součet tří lichých čísel je číslo sudé.

C/ Součet druhé mocniny lichého čísla a dvojnásobku sudého čísla je číslo sudé.

D/ Součin sudého čísla a druhé mocniny lichého čísla je číslo liché.

E/ Součin dvou lichých čísel je číslo liché.

Úloha 3

1.3

Výbor má méně než 18 členů. Dvě třetiny členů výboru obsadí tři čtvrtiny židlí v místnosti. Počet členů výboru je:

A/ 3 B/ 6 C/ 9 D/ 12 E/ 15

Úloha 4

1.1

Tajná zpráva má méně než 3 000 znaků. Lze ji odeslat buď jako sedm depeší se stejným počtem znaků, nebo jako osm depeší se stejným počtem znaků, nebo jako devět depeší se stejným počtem znaků, nebo jako deset depeší se stejným počtem znaků. Počet znaků zprávy je:

A/ 2040 B/ 1 260 C/ 840 D/ 2 520 E/ 1 680

Úloha 5

1.3

1 hodina a 40 minut je:

A/ $\frac{5}{72}$ dne B/ $\frac{3}{52}$ dne C/ $\frac{5}{48}$ dne D/ $\frac{2}{45}$ dne E/ $\frac{5}{42}$ dne

Úloha 6

1.2

Ve výrazu

$$-328 + 597 - 486 - 745 + 953$$

lze změnit jedno z pěti znamének na opačné tak, aby hodnota nového výrazu byla 1 481. Jde o znaménko před číslem:

A/ 328 B/ 597 C/ 486 D/ 745 E/ 953

* označení uváděná nad úlohami odpovídají jejich zařazení k příslušné cílové kompetenci a tematickému okruhu dle Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004. Blíže informace naleznete v kapitole Provázanost Sbírky úloh s katalogem na str. 95.

Řešení: 1C, 2E, 3C, 4D, 5A, 6D

Úloha 7

1.1

Předpokládejme, že a je číslice desítkové soustavy. Číslo $2a31a$ je dělitelné třemi právě tehdy, když a je:

A/ 3, nebo 9

B/ 3

C/ 2, nebo 5, nebo 8

D/ z množiny $\{0, 3, 6, 9\}$ E/ z množiny $\{3, 6, 9\}$

Úloha 8

1.3

Nůž soustruhu se posouvá rychlostí 0,2 mm za jednu otáčku. Soustruh vykonává 90 otáček za minutu. Soustružení tyče dlouhé 1,2 m bude trvat:

A/ 100 min

B/ 66 min 40 s

C/ 1 h 6 min

D/ 3980 s

Úloha 9

1.3

Kapka oleje se na vodě rozleje do olejové vrstvy, jejíž tloušťka přibližně odpovídá průměru molekuly oleje. Kapka oleje o objemu 1 mm^3 vytvoří na vodě olejovou skvrnu o rozloze 1 m^2 . Průměr molekuly oleje je přibližně:

A/ 10^{-4} cm B/ 10^{-6} cm C/ 10^{-7} cm D/ 10^{-9} cm E/ 10^{-10} cm

Úloha 10

1.3

Pro hodinu matematiky vyrobila Zuzana z kartonu síť krychle o obsahu 294 cm^2 . Objem této krychle je:

A/ $0,0243 \text{ m}^3$ B/ $4,9 \text{ dm}^3$ C/ $0,3 \text{ dm}^3$ D/ $343\,000 \text{ mm}^3$ E/ $75\,000 \text{ mm}^3$

Úloha 11

1.3

Nejmenší přirozené číslo m , pro které je hodnota výrazu

$$m \cdot \left(-\frac{3}{5} + \frac{5}{12} - \frac{1}{15} + \frac{7}{20} - \frac{1}{60} \right)$$

rovna celému číslu, je:

A/ $m = 5$ B/ $m = 12$ C/ $m = 15$ D/ $m = 20$ E/ $m = 60$

Úloha 12

1.3

Na trhu byly dva stánky s borůvkami. U prvního stánku stál 1 litr borůvek 40 Kč, u druhého 1 kg borůvek 60 Kč. Hmotnost 1 litru borůvek je 650 g. 1 kg borůvek byl:

A/ u prvního stánku levnější asi o 3 Kč

B/ u druhého stánku levnější asi o 3 Kč

C/ u prvního stánku levnější asi o 1,50 Kč

D/ u druhého stánku levnější asi o 1,50 Kč

E/ stejně drahý u obou stánků

Úloha 13**1.4****ŘEŠENÍ**

Celým číslem je číslo:

A/ $1,004 \cdot (-\sqrt{5})^2$

B/ $\frac{1}{2 \cdot 5^{-2}}$

C/ $\frac{1}{0,036}$

D/ $\left[\frac{1}{(\sqrt{3})^3} \right]^{-2}$

E/ $0,0258 \cdot 10^3$

Úloha 14**1.3**Hmotnost protonu je přibližně $2 \cdot 10^{-24}$ kg. Počet protonů, jejichž celková hmotnost je 1 g, je přibližně:

A/ $5 \cdot 10^{20}$

B/ $4 \cdot 10^{21}$

C/ $2 \cdot 10^{22}$

D/ $5 \cdot 10^{23}$

E/ $2 \cdot 10^{24}$

Úloha 15**1.4**Vzestupné uspořádání čísel $2,44\overline{9}$, $2,449$, $2,44\overline{9}$, $2,\overline{449}$, $\sqrt{6}$ je:

A/ $2,44\overline{9} < 2,449 < 2,\overline{449} < 2,44\overline{9} < \sqrt{6}$

B/ $2,449 < 2,44\overline{9} < \sqrt{6} < 2,44\overline{9} < 2,44\overline{9}$

C/ $2,449 < 2,44\overline{9} < 2,\overline{449} < \sqrt{6} < 2,44\overline{9}$

D/ $2,44\overline{9} < \sqrt{6} < 2,449 < 2,44\overline{9} < 2,44\overline{9}$

E/ $2,449 < 2,44\overline{9} < 2,44\overline{9} < \sqrt{6} < 2,44\overline{9}$

Úloha 16**1.4**

Za uplynulý rok vzrostla mzda pana Nováka o 15 %, zatímco ceny vzrostly v průměru o 8 %. Nárůst „kupní síly“ pana Nováka, tj. nárůst množství zboží, které si pan Novák může za svou mzdu koupit, je přibližně:

A/ 5,7 %

B/ 6 %

C/ 6,5 %

D/ 7 %

E/ 8,4 %

Úloha 17**1.3**

Tři společně podnikající kamarádi dostali za vykonanou práci 95 000 Kč, z čehož odvedli 15 % daň a 20 000 Kč zaplatili za materiál. Zbytek peněz si podle počtu odpracovaných dní rozdělili v poměru 2 : 3 : 4. Byly to částky:

A/ 14 400 Kč, 21 600 Kč, 28 800 Kč

B/ 13 500 Kč, 20 250 Kč, 27 000 Kč

C/ 15 180 Kč, 20 250 Kč, 30 750 Kč

D/ 16 180 Kč, 21 580 Kč, 32 370 Kč

Úloha 18**1.4**Podmnožinou množiny $\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ není množina:

A/ $\{-2, -1, 0\}$

B/ $\langle -2, 1 \rangle$

C/ $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

D/ $\langle -\frac{7}{4}\pi, 0 \rangle$

E/ $\langle -\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \rangle$

Řešení: 13D, 14A, 15B, 16C, 17B, 18D

Úloha 19

1.3

Obdélníkové hřiště, které mělo rozměry 40 m a 15 m, bylo upraveno tak, že jeho délka byla zmenšena o 15 % a šířka zvětšena o 30 %. Rozhodněte, zda je obsah plochy nového hřiště větší, nebo menší než obsah plochy původního hřiště. O kolik procent?

str. 57

Úloha 20

1.3

Vodovodním kohoutkem kape jedna kapka za sekundu. Objem kapky je $0,1 \text{ cm}^3$. Vypočítejte:

- objem vody (v litrech), která odkape z kohoutku za 1 den
- objem vody (v m^3), která odkape z kohoutku za 1 rok
- dobu, za kterou by se tímto kapáním naplnilo akvárium s vnitřními rozměry 30 cm, 30 cm, 40 cm

str. 57

Úloha 21

1.3

Převodovka obsahuje za sebou tři ozubená kola, jež jsou spojena řetězy s otvory pro jednotlivé zuby. Kola mají postupně 15, 105 a 819 zubů. Po kolika otáčkách prostředního kola budou ozubená kola ve stejné vzájemné poloze jako na začátku pohybu?

str. 57

Úloha 22

1.1

Pro každé přirozené číslo n je číslo $2n - 1$ liché a číslo $2n$ sudé.

- Ukažte, že součet libovolného lichého a po něm následujícího sudého čísla zvětšený o 1 je dělitelný čtyřmi.
- Rozhodněte, zda je součet libovolného sudého a po něm následujícího lichého čísla zvětšený o 1 dělitelný čtyřmi.
- Rozhodněte, zda je součet druhých mocnin libovolného sudého a po něm následujícího lichého čísla zmenšený o 1 dělitelný čtyřmi.

str. 58

Úloha 23

1.4

- Usměrňte zlomek $\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$.

- Dokažte, že $\sqrt{\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$.

- Dokažte, že $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$.

str. 58

Úloha 24

1.3

Dusičnan sodný NaNO_3 se skládá ze sodíku Na s relativní atomovou hmotností $A_r(\text{Na}) = 23$, dusíku N s relativní atomovou hmotností $A_r(\text{N}) = 14$ a kyslíku O s relativní atomovou hmotností $A_r(\text{O}) = 16$.

- a) Jaké je procentní zastoupení hmotností jednotlivých prvků v NaNO_3 ?
b) Kolik gramů každého prvku je v 595 gramech NaNO_3 ?
c) Jaké množství dusičnanu sodného máme k dispozici, víme-li, že je v něm 624 g kyslíku?

str.58

Úloha 25

1.3

Vejce se skládá ze skořápky, bílku a žloutku a má hmotnost 47,5 g. Na skořápku připadá 10 %, na bílek 60 % hmotnosti. Kromě výživných látek obsahuje bílek 85 % a žloutek 60 % vody.

- a) Kolik procent hmotnosti vejce tvoří výživné látky v bílku?
b) Jaká je hmotnost vody v žloutku?
c) Jaká je hmotnost výživných látek v celém vejci?

str.58

Úloha 26

1.3

Česká dvacetikorunová mince je vyrobena z oceli, která je plátkována mosazí. Mosaz tvoří 6 % hmotnosti mince. Mosaz je slitina mědi a zinku v poměru hmotností 62 : 38. Dokažte, že postupný poměr hmotností mědi, zinku a oceli v dvacetikorunové minci je 93 : 57 : 2350.

str.59

2 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Uzavřené úlohy

Úloha 27

Hodnota výrazu $(0,04^{\frac{1}{6}})^{-3}$ je:

A/ $\frac{1}{5}$

B/ 5

C/ 25

D/ 50

E/ 125

Úloha 28

Výraz $\frac{3+m}{2m-1} + \frac{4-m}{1-2m}$ je pro každé $m \neq \frac{1}{2}$ roven:

A/ 1

B/ -1

C/ $\frac{-1}{2m-1}$

D/ $\frac{7}{2m-1}$

E/ $\frac{-7}{2m-1}$

Úloha 29

Výraz $(1+x^{\frac{1}{2}})^2 - (1-x^{\frac{1}{2}})^2$ je pro každé $x \in \mathbb{R}_0^+$ roven:

A/ 0

B/ $\sqrt[3]{x}$

C/ 2x

D/ 4x

E/ $4\sqrt{x}$

Úloha 30

Výraz $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a} \sqrt[3]{a}}$ je pro každé $a > 0$ roven:

A/ 1

B/ $\sqrt[6]{a}$

C/ $\sqrt[3]{a^2}$

D/ $\sqrt{a^3}$

E/ $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$

Úloha 31

Výsledkem násobení

$$(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) \cdot (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)$$

je mnohočlen, jehož koeficient u mocniny x^4 je roven:

A/ 25

B/ 9

C/ 55

D/ 15

E/ 54

Úloha 32

Výraz $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$ je za podmínky $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ roven:

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{x}$$

A/ $\frac{x+y}{xy}$

B/ $-\frac{x+y}{xy}$

C/ $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

D/ $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

E/ $x+y$

Řešení: 27B, 28A, 29E, 30B, 31C, 32B

Úloha 33

2.3

ŘEŠENÍ

Výraz $\frac{a-1}{\sqrt{a}+1} + \frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ je pro každé $a \geq 0$, $a \neq 1$, roven:

- A/ 2 B/ $2\sqrt{a}$ C/ $a+1$ D/ $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ E/ $\frac{1}{2}a$

Úloha 34

2.3

Výraz $\left(\frac{z^2-z}{z^2-9}\right)^{-1} \cdot \frac{z-1}{z^2-3z}$ je pro každé $z \notin \{-3, 0, 1, 3\}$ roven:

- 2.2 A/ $\frac{z-3}{z}$ B/ $\frac{z+3}{z^2}$ C/ $\frac{z-3}{2z}$ D/ $\frac{z-3}{z^2}$ E/ $\frac{z+3}{z}$

Úloha 35

2.3

Výraz $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : \frac{(x-y)^2}{xy}$ je za podmíněk $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$ roven:

- 2.3 A/ $\frac{x+y}{xy}$ B/ $\frac{x+y}{x-y}$ C/ $\frac{x-y}{x+y}$ D/ 1 E/ $x^2 - y^2$

Úloha 36

2.3

— 15 % z čísla $\frac{1}{5} - (1,5 \cdot \frac{4}{15} - 1,6) \cdot \left[(-1\frac{1}{2})^2 - \sqrt{2\frac{7}{9}}\right]$ je:

- 2.3 A/ $\frac{27}{200}$ B/ $\frac{27}{100}$ C/ 3 D/ 6

Úloha 37

2.1

Zahrada má tvar trojúhelníku, jehož první strana měří $(m+n)$ metrů, druhá strana je o $(n-5)$ metrů kratší než první strana a třetí strana je o $(2m+5)$ metrů delší než druhá strana. Drátěný plot kolem celé zahrady bude mít délku:

- A/ $(3m+2n)$ metrů B/ $(4m+n-5)$ metrů
C/ $(5m+n+15)$ metrů D/ $(4m-5)$ metrů
E/ $(4m+5)$ metrů

Úloha 38

2.2

2. Začínající dělník opracuje na fréze za x hodin 7 výrobků. Zkušený dělník opracuje za $(x+2)$ hodin 14 stejných výrobků. Zkušený dělník tudíž opracuje za hodinu k -krát více výrobků než začínající dělník, kde:

- A/ $k = 2$ B/ $k = \frac{2x}{x+2}$ C/ $k = x$
D/ $k = \frac{14}{x+2}$ E/ $k = \frac{2(x+2)}{x}$

Řešení: 33B, 34B, 35B, 36A, 37C, 38B

Úloha 39

Má-li platit rovnost

$$(a - \sqrt{2})^3 = a^3 + 6a + \dots$$

pro všechna reálná čísla a , je třeba doplnit pravou stranu o výraz:

A/ $-3a^2 \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

B/ $-3a^2 \cdot \sqrt{2} - 4$

C/ $-3a^2 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

D/ $-3a^2 + 4$

E/ $-3a^2 \cdot \sqrt{2} - 4$

Úloha 40

Jestliže pro čísla $a \neq 0$, $b \neq 0$ platí $4(9a - 13b) = 6(a - 2b)$, potom poměr $a : b$ je:

A/ $3 : 4$

B/ $4 : 3$

C/ $3 : 5$

D/ $5 : 3$

Úloha 41

Jestliže $a : b : c = 3 : 1 : 5$, je výraz $\frac{2a + 3b}{4b + 3c}$ roven:

A/ $\frac{4}{5}$

B/ $\frac{7}{6}$

C/ $\frac{11}{9}$

D/ $\frac{13}{8}$

E/ $\frac{9}{19}$

Úloha 42

Pro čísla 2^{50} , 3^{30} , 5^{20} platí:

A/ $2^{50} > 3^{30} > 5^{20}$

B/ $3^{30} > 2^{50} > 5^{20}$

C/ $3^{30} > 5^{20} > 2^{50}$

D/ $5^{20} > 2^{50} > 3^{30}$

E/ $5^{20} > 3^{30} > 2^{50}$

Úloha 43

Je dán výraz

$$V(a) = \left(1 + \frac{a}{1+a}\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right).$$

Pro čísla $V(-2)$, $V(0)$, $V(2)$ platí:

A/ $V(-2) < V(0) < V(2)$

B/ $V(-2) < V(2) < V(0)$

C/ $V(2) < V(0) < V(-2)$

D/ $V(2) < V(-2) < V(0)$

E/ $V(0) < V(-2) < V(2)$

Úloha 44

Jestliže pro kladné číslo x platí $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^k$, pak číslo k je rovno:

A/ $\frac{7}{8}$

B/ $\frac{3}{8}$

C/ $\frac{1}{64}$

D/ $\frac{1}{8}$

E/ $\frac{3}{2}$

Úloha 45

Výraz $\left(\frac{x^{-2}y^2z^{-2}}{x^0y^{-8}}\right)^{-2} : \frac{x^2z^3}{x^{-4}y^7}$ je za podmínek $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ roven:

A/ $\frac{x^8z}{y^4}$

B/ $\frac{z}{x^2y^{13}}$

C/ $x^2y^{11}z$

D/ $\frac{y^{13}}{x^2z}$

E/ $\frac{x^2z}{y^{11}}$

Řešení: 39A, 40B, 41E, 42A, 43D, 44A, 45B

Úloha 46

2.2

ŘEŠENÍ

Jestliže se v levé straně rovnosti

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = 9$$

čitatel i jmenovatel zvětšují vždy o 1, potom je součet čísel a a b roven:

A/ 11 B/ 13 C/ 17 D/ 35 E/ 37

Úloha 47

2.3

Zahradní nádrž má tvar kvádru o rozměrech 2 m, 3 m a 4 m. Zvětší-li se každý její rozměr o z metrů, zvětší se objem nádrže o:

A/ $(z^3 + 10z^2 + 30z + 24) \text{ m}^3$ B/ $(z^3 + 9z^2 + 26z + 24) \text{ m}^3$
 C/ $(z^3 + 10z^2 + 30z) \text{ m}^3$ D/ $(z^3 + 9z^2 + 26z) \text{ m}^3$

Úloha 48

2.1

Mnohočlen, který po dělení mnohočlenem $x + 1$ dává pro neúplný podíl $x + 3$ a zbytek -3 , je roven:

A/ $x^2 + 4x + 6$ B/ $x + 3$ C/ $x^2 + 4x + 3$
 D/ $x^2 + 4x$ E/ $x^3 + 4x^2$

Úloha 49

2.1

V rovnosti mnohočlenů

$$(ax + 1) \cdot (3x + b) = 6x^2 + cx - 1$$

jsou a , b , c reálná čísla. Číslo a je rovno:

A/ 1 B/ 3 C/ 0 D/ 2 E/ 6

Otevřené úlohy**Úloha 50**

2.2

Je dán výraz $V(m) = \frac{72 - 2m^2}{m^2 - 4m - 12}$.

- a) Určete podmínky, za kterých má výraz $V(m)$ smysl.
 b) Výraz $V(m)$ zjednodušte.
 c) Vypočtěte hodnotu výrazu $V(m)$ pro $m = -1$.
 d) Určete, pro která reálná čísla m má výraz $V(m)$ hodnotu rovnou nule.

str. 59

Úloha 51

2.3

Je dán výraz $(a^{12}b^{-3})^{\frac{1}{6}}$.

- a) Zjednodušte ho a uveďte podmínky, za kterých má smysl.
 b) Vypočtěte hodnotu daného výrazu pro $a = \sqrt{3}$, $b = 36$.

str. 60

Řešení: 46D, 47D, 48D, 49D

Úloha 52

2.Ú

Na planině u Gízy se na rozloze 5 hektarů zdvíhá Chufeova pyramida.

- Na vrchol pyramidy, který je ve výšce 147 m, vede 490 schodů o stejné výšce. O kolik cm by se zmenšila výška každého schodu, kdyby na vrchol vedlo o 10 schodů více?
- Na vrchol pyramidy, který je ve výšce x metrů, vede y stejně vysokých schodů. O kolik metrů by se zmenšila výška každého schodu, kdyby na vrchol vedlo o z schodů více? Kolik procent původní výšky schodu by tvořila výška nového schodu?

str. 60

Úloha 53

2..

Určete množinu M všech reálných čísel y , pro která nabývá výraz

$$\left(y + \frac{3y}{y-3}\right) \cdot \left(\frac{3y}{y+3} - 3\right) : \frac{9y^2}{y^2-9}$$

hodnoty -1 .

str. 60

Úloha 54

2.

- Nechť n , $n+1$, $n+2$ jsou libovolná tři po sobě jdoucí přirozená čísla. Ukažte, že jejich součet je dělitelný třemi.
- Ukažte, že součet každých pěti po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný pěti.
- Ukažte, že součet žádných čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel není dělitelný čtyřmi.

str. 60

Úloha 55

2.

Výraz

$$V(x) = \left(\frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+2}\right) \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

zjednodušte a uveďte podmínky, za kterých má smysl.

str. 61

Úloha 56

2.

- Kolik litrů rozpouštědla je třeba přidat do 56 litrů 96procentního roztoku, abychom dostali 84procentní roztok?
- Kolik litrů rozpouštědla je třeba přidat do a litrů p -procentního roztoku, abychom dostali q -procentní roztok ($0 < q < p$)?

str. 61

Úloha 57**2.2****ŘEŠENÍ**

a) Najděte výraz $V(a)$, po jehož vydělení výrazem $a^4 + 3a^2 - 10$ dostaneme výraz $a^2 + 5$. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je možné dělení provést.

b) Najděte výraz $W(a)$, po jehož vynásobení výrazem $a^4 + 3a^2 - 10$ dostaneme výraz $a^7 + 3a^5 + 3a^4 - 10a^3 + 9a^2 - 30$. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je možné násobení provést.

str. 61

Úloha 58**2.2**

a) Zjednodušte výraz

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{x^2y + xy^2}{xy} + \frac{x^3}{y^2} \right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right)$$

a určete podmínky, za nichž má smysl.

b) Výsledek úlohy a) ověřte pro $x = 2$, $y = 1$.

str. 62

Úloha 59**2.1**

a) Je dán výraz $(x - y)^3 - x^3 + y^3$.

b) Rozložte ho na součin mnohočlenů co nejnižších stupňů.

c) Určete podmínky, za nichž má daný výraz hodnotu nula.

d) Zakreslete v soustavě souřadnic Oxy množinu všech bodů $[x, y]$, pro které platí $(x - y)^3 - x^3 + y^3 = 0$.

str. 62

Úloha 60**2.1**

a) Rozměry kváдру jsou $(x - 2)$ metrů, $(x + 1)$ metrů, $(2x + 3)$ metrů, $x > 2$.

b) Určete mnohočleny, které vyjadřují objem V a povrch S tohoto kváдру.

c) Vypočítejte objem a povrch kváдру pro $x = 4,5$.

d) Určete všechny hodnoty x , pro něž je uvažovaný kvádr pravidelným čtyřbokým hranolem.

str. 62

Uzavřené úlohy

Úloha 61

3.

Pekař připravil várku těsta. Pětinu hmoty oddělil na tmavé rohlíky, čtvrtinu na dalaňánky a zbytek po dvou kilogramech na 22 bochníků chleba. Hmotnost těsta na dalaňánky byla:

A/ 12 kg B/ 16 kg C/ 20 kg D/ 24 kg E/ 26 kg

Úloha 62

3.

Průměrný věk rodiny, která se skládá z otce, matky a syna, je 37 let. Synov je 20 let, otec je o 3 roky starší než matka. Věk matky při narození syna byl:

A/ 23 let B/ 24 let C/ 25 let D/ 26 let E/ 27 let

Úloha 63

3.

Kolik litrů vody 48°C teplé je nutné přidat do 1,2 hl vody 8°C teplé abychom dostali vodu teplou 24°C?

A/ 40 litrů B/ 60 litrů C/ 80 litrů D/ 100 litrů

Úloha 64

3.

Množina všech řešení nerovnice $4x - 3 \geq 2 - 6x$ v intervalu $(-2, 2)$ je:

A/ $\emptyset$ B/ $\{1, 2\}$ C/ $\langle 1, 2 \rangle$ D/ $\langle \frac{1}{2}, 2 \rangle$ E/ $(-2, 2)$

Úloha 65

3.

Opěrná stěna je vytvořena z ocelových profilů, které se zatloukají mechanickým beranidlem. Jeden díl je zaražen čtvrtinou své délky v zemi, třetinu jeho délky je ve vodě a 5 m je nad hladinou vody. Část dílu nad vodou představuje z celé jeho délky přibližně:

A/ 32 % B/ 38,33 % C/ 40,67 % D/ 41,67 % E/ 43,33 %

Úloha 66

3.

Množina všech reálných čísel, která nejsou větší než $-\frac{13}{11}$ a nejsou menší než $-\frac{1}{2}$, je:

A/ $\langle -\frac{13}{11}, -\frac{1}{2} \rangle$ B/ $\emptyset$ C/ $(-\infty, -\frac{13}{11})$
D/ $\langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle$ E/ $\mathbb{R}$

Řešení: 61 C, 62 B, 63 C, 64 D, 65 D, 66 B

Úloha 67

3.1

ŘEŠEN

Do hrnce tvaru válce se vejde přesně 5,5 litru vody, vnitřní průměr dna je 15 cm. Hloubka hrnce je přibližně:

A/ 15,6 cm B/ 20,7 cm C/ 9,5 cm D/ 11,2 cm E/ 5 cm

Úloha 68

3.1

Technik měl hrubý měsíční plat 12 000 Kč. Během roku mu bylo přiznáno osobní ohodnocení ve výši 10 %. Jeho hrubá mzda za celý rok byla 153 600 Kč (odměny a třináctý plat nejsou započteny). Osobní ohodnocení mu bylo přiznáno:

A/ od února B/ od května C/ od června
D/ od srpna E/ od září

Úloha 69

3.2

Mezi rovnicemi

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = 5, \quad \frac{y}{0,3} = \frac{3}{10}, \quad \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{z}{2}, \quad (u-3)^2 = -1$$

ple počet těch, které mají celočíselná řešení, roven:

A/ 0 B/ 1 C/ 2 D/ 3 E/ 4

Úloha 70

3.2

Součet kořenů rovnice $x^2 + bx - 12 = 0$ je 1. Kořeny této rovnice jsou:

A/ 0, 1 B/ -1, 2 C/ -2, 3 D/ -3, 4 E/ -4, 5

Úloha 71

3.2

Jedním kořenem rovnice $x^2 + c = 0$ je číslo $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$. Jejím druhým kořenem je číslo:

A/ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ B/ $\frac{-3-\sqrt{2}}{2}$ C/ $\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$
D/ $\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}$ E/ $-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$

Úloha 72

3.3

výrobní náklady na n součástek téhož typu jsou $(6n + 2000)$ Kč, jedna součástka se prodává za 15 Kč. Nejmenší počet součástek, které je třeba vyrobit a prodat, aby čistý zisk přesáhl 10 000 Kč, je:

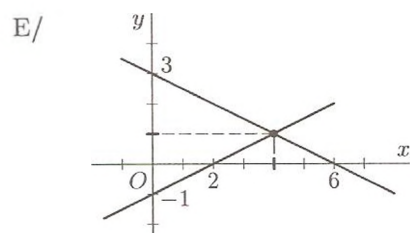
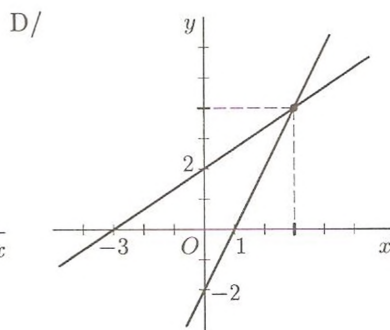
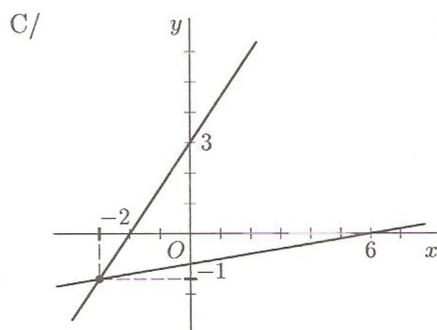
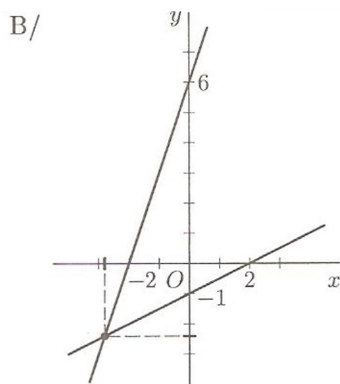
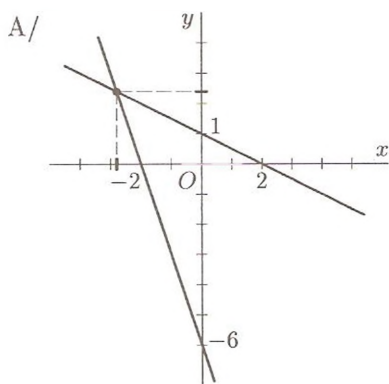
A/ 998 B/ 1050 C/ 1334 D/ 1355 E/ 1500

Řešení: 67D, 68B, 69B, 70D, 71C, 72C

Grafické řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x - 2y &= 2, \\ -3x + y &= 6\end{aligned}$$

je na obrázku:



Úloha 80

Počet řešení rovnice

$$\frac{1}{x} - \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x-2} = 0$$

je roven:

A/ 0

B/ 1

C/ 2

D/ 3

E/ 4

Úloha 81

Množina všech řešení rovnice $\frac{(x-5)(x+5)}{25-x^2} = 0$ je:A/ $(-5, 5)$ B/ $\{-5, 5\}$ C/ $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ D/ $\emptyset$ E/ $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$

Úloha 82

Pavel má červené a modré žetony. Jestliže vsadí jeden červený žeton, pak sedmina jeho zbývajících žetonů bude červená. Jestliže ale místo jednoho červeného vsadí dva modré žetony, pak červená bude pětina zbývajících žetonů. Počet Pavlových žetonů je:

A/ 8

B/ 22

C/ 36

D/ 57

E/ 71

Úloha 83

Součet nejmenšího kořenu rovnice $(2x+1)^2 = 8$ a největšího kořenu rovnice $(3-2y)^2 = 8$ je:

A/ $-1 - 2\sqrt{2}$

B/ 1

C/ $4 + 2\sqrt{2}$ D/ $2\sqrt{2}$

E/ -2

Úloha 84

Pozemek o výměře 571,2 arů má tvar obdélníku, jehož sousední strany se liší o 2 metry. Největší vzdálenost dvou míst na pozemku je:

A/ 33,8 m

B/ 338 m

C/ 478 m

D/ 106,9 m

E/ 1068,9 m

Úloha 85

Každý ze skupiny výletníků měl zaplatit za oběd v restauraci stejnou částku. Celková cena oběda byla 1632 Kč. Protože dva výletníci neměli peníze, zaplatili ostatní o 12,80 Kč více, než kdyby platili všichni. Účastníků výletu bylo:

A/ 17

B/ 15

C/ 12

D/ 11

E/ 9

Řešení: 80 C, 81 D, 82 B, 83 B, 84 B, 85 A

Úloha 86

3.2

Vzdálenost střední školy od Petrova domova je 400 m. Když tam šel Petr poprvé, udělal o 300 kroků více, než když šel k maturitní zkoušce, kdy už byl každý jeho krok o 30 cm delší. Délka Petrova kroku na konci studia na střední škole byla:

- A/ 60 cm B/ 70 cm C/ 75 cm D/ 80 cm E/ 85 cm

Úloha 87

3.3

Množina všech řešení nerovnice $\frac{(x-2)(x+3)}{(5-x)(2-x)} \leq 0$ v oboru reálných čísel

- A/ $\langle -3, 2 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle$ B/ $\langle -3, 2 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle$ C/ $\langle -3, 2 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$
 D/ $\langle -3, 5 \rangle \setminus \{2\}$ E/ $\langle -3, 5 \rangle$

Úloha 88

3.2

Na záhonu pěstuje jahody na záhonu, který má tvar obdélníku s obvodem 17,4 m. Kdyby byl záhon o 1 m delší a o 1 m užší, byla by jeho výměra menší o 2,7 m². Rozměry záhonu jsou:

- A/ 5 m a 3,6 m B/ 5,2 m a 3,5 m C/ 4,8 m a 3,6 m
 D/ 4,8 m a 4 m E/ 5 m a 3,5 m

Úloha 89

3.2

Čísla p , q mají tu vlastnost, že rovnice $x^2 + px + q = 0$ má kořeny $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ a $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$. Hodnota výrazu $3p + q$ je rovna:

- A/ $7 + 6\sqrt{2}$ B/ $-9 + 8\sqrt{2}$ C/ $9 - 8\sqrt{2}$
 D/ -11 E/ 11

Úloha 90

3.2

Na střední škole je zapsáno 780 studentů. Počet tříd je o 4 větší než průměrný počet studentů v každé třídě. Počet tříd je:

- A/ 26 B/ 28 C/ 30 D/ 32

Úloha 91

3.1

Honza pozoroval babiččin dvorek se zvířaty. Babička měla slepice, husy, kterých bylo o 4 více než slepic, dva kohouty a psa Baryka. Honza zjistil, že vynásobí-li počet slepic počtem hus, dostane jako výsledek počet nohou všech zvířat, která jsou na dvorku. Počet zvířat na dvorku byl:

- A/ 12 B/ 14 C/ 15 D/ 16 E/ 18

Řešení: 86D, 87D, 88B, 89D, 90C, 91C

Úloha 92

3

Průměrná spotřeba pohonných hmot při jízdě automobilu po dálnici je 6 litrů na 100 km a při jízdě ve městě 8,5 litru na 100 km. Automobil ujel po dálnici a ve městě celkem 75 km a spotřeboval 5 litrů benzínu. Automobil ujel:

- A/ po dálnici 20 km a ve městě 55 km
- B/ po dálnici 55 km a ve městě 20 km
- C/ po dálnici 35 km a ve městě 40 km
- D/ po dálnici 40 km a ve městě 35 km
- E/ po dálnici 50 km a ve městě 25 km

Úloha 93

3

Máme určitý počet bonbónů a prázdných krabiček. Budeme-li bonbóny ukládat do krabiček po deseti, zbudou nám 2 bonbóny a 8 prázdných krabiček. Budeme-li bonbóny ukládat do krabiček po osmi, zbude nám 6 bonbónů a 3 krabičky. Budeme-li bonbóny ukládat do krabiček po devíti, zbude nám

- A/ 6 bonbónů a 5 krabiček
- B/ 8 bonbónů a 5 krabiček
- C/ 6 bonbónů a 6 krabiček
- D/ 5 bonbónů a 6 krabiček
- E/ 8 bonbónů a 6 krabiček

Úloha 94

3

Turista šel po rovině rychlostí 4 km/h a pak do kopce rychlostí 3 km/h. Zpátky se vracel stejnou cestou. Dolů z kopce šel rychlostí 6 km/h, po rovině opět rychlostí 4 km/h. Výlet trval 5 hodin. Turista ušel celkem:

- A/ 10 km
- B/ 20 km
- C/ 12 km
- D/ 24 km
- E/ 15 km

Úloha 95

3

Dva dělníci vykopou společně příkop za 3 hodiny. Na základě tohoto údaje nelze vyloučit, že kdyby pracoval každý sám, vykopali by příkop:

- A/ jeden za 4 h a druhý za 12 h
- B/ jeden za 5 h a druhý za 8 h
- C/ jeden za 3 h a druhý za 9 h
- D/ jeden za 6 h a druhý za 8 h
- E/ jeden za 4 h a druhý za 8 h

Otevřené úlohy

Úloha 96

Dané trojčíferné číslo je 64násobkem svého ciferného součtu. Na místě desítek má číslici 1. Vyměníme-li navzájem číslice na místech stovek a jednotek, dostaneme trojčíferné číslo o 297 menší. Určete dané číslo.

3. úloha 97

3.1

Auto jelo po dálnici konstantní rychlostí 55 km/h. Řidič zahlédl ve zpětném zrcátku za sebou auto vzdálené 0,5 km, které jelo rychleji a za 1 minutu ho předjelo. Vypočítejte rychlost druhého auta za předpokladu, že byla také konstantní.

Za dalších 6 minut pomalejší auto druhý automobil opět dostihlo, protože ten byl zastaven silniční kontrolou. Jak dlouho již stál?

str. 63

3. úloha 98

3.1

Ze smetany s obsahem tuku 38 % a z mléka o tučnosti 4,25 % chceme vyrobit 10 litrů šlehačky o tučnosti 33 %. Kolik litrů každé suroviny potřebujeme, jestliže uvedené koncentrace jsou objemové?

str. 63

3. úloha 99

3.3

Na zahradě je čtvercový záhon s délkou strany 6 m.

Kolik procent můžeme stranu záhonu prodloužit, má-li se jeho rozloha zvětšit nejvýše o 21 %.

Kolik procent se rozloha záhonu zmenší, rozdělíme-li jej dvěma navzájem kolmými pěšinami o šířce 30 cm, které budou rovnoběžné se stranami záhonu?

str. 64

3. úloha 100

3.1

Pro bazén, který má tvar kvádra, má obsah 375 m^2 . Šířka bazénu je 60 % jeho délky.

Určete rozměry dna bazénu.

Kolik litrů vody je v bazénu, je-li hloubka bazénu 1,5 m a voda sahá 15 cm pod okraj?

str. 64

3. úloha 101

3.1

Tři muži strávili v posilovně za rok celkem 440 hodin. První posiloval tak dlouho jako druhý a třetí dohromady, 40 % času pobytu v posilovně prvního mužů se rovná 50 % času pobytu v posilovně druhého z nich. Kolik hodin trávil v posilovně každý z mužů?

str. 64

3. úloha 102

3.3

Je dán výraz $\frac{(x-5)(x+2)}{x+8}$.

Určete, pro která reálná čísla x je tento výraz definován.

Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ má daný výraz hodnotu nula.

Vypočítejte jeho hodnotu pro $x = -\frac{1}{2}$.

Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ je hodnota daného výrazu nezáporná.

str. 64

Úloha 103

V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic:

$$\frac{7}{x+5} \geq 1, \quad \frac{15}{7-x} < 2$$

str. 65

Úloha 104

Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky 6 cm a jednu odvěsnu o $2\sqrt{2}$ cm delší než druhou odvěsnu. Vypočtete obsah tohoto trojúhelníku.

str. 65

Úloha 105

Je dána soustava rovnic:

$$x - y = 2$$

$$x + 3y - 6 = 0$$

- a) Řešte ji početně.
 d) Vypočtete souřadnice průsečíků přímky $x - y = 2$ s osami souřadnic.
 b) Řešte danou soustavu rovnic graficky.
 c) Rozhodněte, zda bod $M[12, -2]$ leží na přímce $x + 3y - 6 = 0$.

str. 66

Úloha 106

V provozu byla zahájena zkušební výroba. Byl instalován jistý počet lis, které při plném výkonu zpracují za den 96 kusů plastových polotovarů. Pokud by bylo instalováno o dva lisy více, pak by při zpracování stejného počtu polotovarů připadlo na jeden lis o 8 kusů méně. Kolik lisů by muselo být v provozu instalováno, aby při plném výkonu zpracovaly za 30 pracovní dnů 9 360 polotovarů?

str. 66

Úloha 107

- a) Vyřešte rovnici

$$\frac{\frac{4x}{3} - \frac{2}{3}}{2 - 3x} - \frac{\frac{5x}{3} - \frac{4}{3}}{x - \frac{2}{3}} = -2.$$

- b) Vyřešte nerovnici

$$\frac{\frac{4x}{3} - \frac{2}{3}}{2 - 3x} - \frac{\frac{5x}{3} - \frac{4}{3}}{x - \frac{2}{3}} \leq -2.$$

str. 67

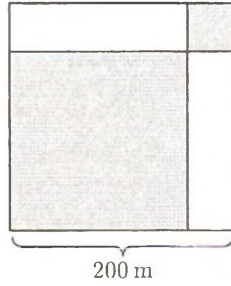
Úloha 108

U klasických obrazovek je poměr šířky a výšky 4 : 3. U moderních obrazovek je tento poměr 16 : 9. Je vyšší klasická obrazovka o úhlopříčce 70 cm, než moderní obrazovka o úhlopříčce 82 cm?

str. 68

Úloha 109

Pozemek má tvar čtverce o straně délky 200 m. Způsobem znázorněným na obzoru jsou z něj vyčleněny dva dílčí pozemky, oba rovněž tvaru čtverce (na obzoru jsou tyto dílčí pozemky podbarveny). Určete délky stran čtvercových dílčích pozemků, jestliže součet jejich obsahů je dvojnásobkem součtu obsahů zbylých dvou dílčích pozemků, které na obzoru podbarveny nejsou.



str. 68

Úloha 110

Plocha povrchu S rotačního válce platí vzorec $S = 2\pi r(r + v)$, kde r je poloměr podstavy válce a v jeho výška.

Vypočítejte průměr podstavy rotačního válce, je-li jeho povrch $0,628 \text{ m}^2$ a výška 30 cm .

Vypočítejte výšku rotačního válce, je-li jeho povrch $(2,5 \cdot 10^4) \text{ dm}^2$ a poloměr podstavy $(5 \cdot 10^2) \text{ cm}$.

Počítejte s hodnotou $\pi = 3,14$.

str. 69

Úloha 111

Číslo p má tu vlastnost, že jeden kořen rovnice $x^2 + px + 6 = 0$ je dvojnásobkem druhého kořene. Určete ciferný součet čísla p^2 .

str. 69

Úloha 112

Je dána rovnice $x - (2x - 3) = (x - 1)^2$.

Řešte ji v oboru přirozených čísel.

V jedné soustavě souřadnic zakreslete grafy funkcí $f: y = x - (2x - 3)$, $g: y = (x - 1)^2$.

Určete početně i graficky, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) \geq f(x)$.

str. 70

Úloha 113

Délka hrany první krychle je o 2 cm větší než délka hrany druhé krychle, objem první krychle je o 14 cm^3 větší než objem druhé krychle. O kolik cm^2 větší povrchy obou krychlí?

str. 70

Uzavřené úlohy

Úloha 114

Železniční koleje rovnoměrně stoupají tak, že na každých dvou metrech převýšení 3 cm. Mezi dvěma místy vzdálenými od sebe 1 420 m je výškový rozdíl:

- A/ 10,7 m B/ 21,3 m C/ 42,6 m D/ 63,9 m E/ 85,2 m

Úloha 115

Automobil jedoucí rychlostí 90 km/h začne brzdít tak, že jeho klesající rychlost je lineární funkcí času. Za 2 sekundy sníží svou rychlost na 72 km/h. Celková doba od začátku brzdění, za kterou automobil úplně zastaví, je:

- A/ 6 sekund B/ 8 sekund C/ 10 sekund
D/ 12 sekund E/ 14 sekund

Úloha 116

Pro lineární funkci f platí $f(-2) = 2$ a $f(3) = -1$. Hodnota $f(1)$ je rovna:

- A/ $-\frac{3}{5}$ B/ $\frac{4}{5}$ C/ $\frac{4}{3}$ D/ $\frac{1}{5}$ E/ $-\frac{5}{3}$

Úloha 117

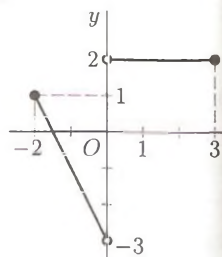
Lineární funkce f nabývá pro $x = -2$ hodnoty -14 , pro $x = 5$ hodnoty 1. Hodnoty 28 nabývá pro:

- A/ $x = 12$ B/ $x = \frac{17}{2}$ C/ $x = 14$ D/ $x = \frac{11}{2}$ E/ $x = 10$

Úloha 118

Na obrázku je znázorněn graf funkce f ; body vyznačené plným kroužkem grafu patří, body vyznačené prázdným kroužkem do grafu nepatří. Pro definiční obor D_f funkce f a pro její obor hodnot H_f platí:

- A/ $D_f = \langle -2, 3 \rangle$, $H_f = (-3, 2)$
B/ $D_f = (-3, 1) \cup \{2\}$, $H_f = \langle -2, 0 \rangle \cup (0, 3)$
C/ $D_f = \langle -2, 3 \rangle$, $H_f = (-3, 2)$
D/ $D_f = \langle -2, 0 \rangle \cup (0, 3)$, $H_f = (-3, 1) \cup \{2\}$
E/ $D_f = \langle -2, 0 \rangle \cup (0, 3)$, $H_f = (-3, 2)$



Řešení: 114B, 115C, 116D, 117B, 118D

úloha 119

4.4

menší kladné číslo x , pro něž má funkce $y = \cos x$ stejnou funkční hodnotu jako pro $x = -\frac{5}{6}\pi$, je:

B/ $\frac{1}{6}\pi$

C/ $\frac{7}{6}\pi$

D/ $\frac{7}{4}\pi$

E/ $\frac{5}{6}\pi$

úloha 120

4.2

lineární funkce f , pro kterou platí $f(-1) = 7$ a $f(3) = -5$, je dána před-

em:

A/ $f: y = 3x + 10$

B/ $f: y = x - 7$

C/ $f: y = 3x + 4$

D/ $f: y = -3x + 4$

E/ $f: y = -3x - 4$

úloha 121

4.2

ramkové hodinky se za 5 hodin opozdí o 7 sekund. Počet celých dní, které uplynuly, než by se hodinky opozdily o 5 hodin (za předpokladu, že jdou stále stejně rychle), je roven:

A/ 5

B/ 53

C/ 535

D/ 5350

úloha 122

4.2

bazén má šest stejných přítokových otvorů. Jsou-li otevřeny tři z nich, naplní se bazén za 24 hodiny. Funkce, která vyjadřuje závislost počtu y dní, než se bazén naplní, na počtu x otevřených přítokových otvorů, je:

A/ $y = \frac{24}{x}, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B/ $y = 3x, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

C/ $y = \frac{72}{x}, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

D/ $y = \frac{6}{x}, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E/ $y = 72x, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

úloha 123

4.1

oborním oborem funkce $f: y = \sqrt{\frac{2+3x}{3-2x}}$ je množina:

A/ $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

B/ $(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$

C/ $(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$

D/ $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

E/ $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

úloha 124

4.2

estliže proměnná y je nepřímo úměrná proměnné u a proměnná u je přímo úměrná proměnné x , potom:

A/ proměnná y je přímo úměrná proměnné x

B/ proměnná y je nepřímo úměrná proměnné x

C/ proměnná y není přímo, ani nepřímo úměrná proměnné x

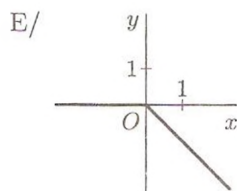
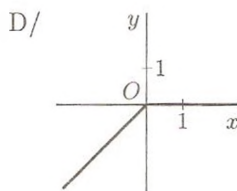
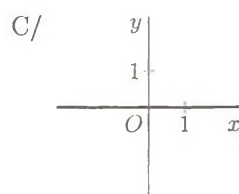
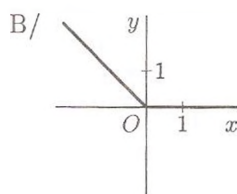
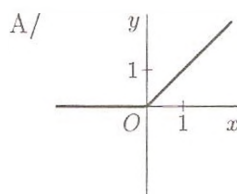
D/ proměnná y je přímo a zároveň nepřímo úměrná proměnné x

str. 74

Řešení: 119E, 120D, 121C, 122C, 123C, 124B

Úloha 125

Graf funkce, která je pro $x < 0$ dána předpisem $y = -x$ a pro $x \geq 0$ předpisem $y = 0$, je na obrázku:



Úloha 126

Je dána funkce $y = -3x$. Její graf posuneme o jednu jednotku délky směru kladné poloosy x . Získáme tak graf funkce:

A/ $y = -3x + 1$

B/ $y = -3x - 3$

C/ $y = -3x + 3$

D/ $y = -\frac{1}{3}x + 3$

E/ $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Úloha 127

Průsečíky grafu funkce $f: y = x^2 - 2x - 2$ s osami souřadnic jsou bod:

A/ $[-1, 0]$, $[0, 2]$

B/ $[-1, 0]$, $[1 + \sqrt{3}, 0]$, $[0, 2]$

C/ $[-1 - \sqrt{3}, 0]$, $[0, 1]$

D/ $[-1 - \sqrt{3}, 0]$, $[-1 + \sqrt{3}, 0]$, $[0, -2]$

E/ $[1 - \sqrt{3}, 0]$, $[1 + \sqrt{3}, 0]$, $[0, -2]$

Úloha 128

Jsou dány nerovnice

$$\sin x < 1, \quad \sin x \leq 2, \quad \operatorname{tg} x < 10^6, \quad \cos x \leq 1, \quad \cos x > -1,5.$$

Množinou všech řešení:

A/ právě jedné z nich je celá množina $\mathbb{R}$

B/ právě dvou z nich je celá množina $\mathbb{R}$

C/ právě tří z nich je celá množina $\mathbb{R}$

D/ právě čtyř z nich je celá množina $\mathbb{R}$

E/ všech pěti z nich je celá množina $\mathbb{R}$

šeni: 125B, 126C, 127E, 128C

$x \geq 0$ maximální hodnota funkce $y = \operatorname{tg} x \cdot \cotg x$:

- A/ je 0 B/ je 1 C/ je $\frac{1}{2}\pi$ D/ je π E/ neexistuje

Úloha 130

4.2

základní střední škola pořádá zájezd na jižní Moravu. Pronájem autobusu bude stát 5 500 Kč, neboť autobusová společnost si účtuje 20 Kč za 1 km. Označme x počet účastníků zájezdu a y Kč cestovné, které připadá na jednoho účastníka. Funkce f vyjadřující závislost y na x je dána předpisem:

A/ $f: y = \frac{550}{20} \cdot x$ B/ $f: y = 5\,500 - 20x$

C/ $f: y = \frac{5\,500}{x}$ D/ $f: y = \frac{x}{5\,500}$

Úloha 131

4.4

oblastina všech $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pro která platí $\sin x > \cos x$, je:

- A/ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{5}{4}\pi, 2\pi)$ B/ $(\frac{1}{4}\pi, \pi)$ C/ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{5}{4}\pi, 2\pi)$
D/ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$ E/ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$

Úloha 132

4.3

funkce $f: y = -x^2 + 4x + 1$ je:

- A/ rostoucí v intervalu $(-\infty, 5)$ a klesající v intervalu $\langle 5, \infty)$
B/ klesající v intervalu $(-\infty, 5)$ a rostoucí v intervalu $\langle 5, \infty)$
C/ rostoucí v intervalu $(-\infty, 2)$ a klesající v intervalu $\langle 2, \infty)$
D/ klesající v intervalu $(-\infty, 2)$ a rostoucí v intervalu $\langle 2, \infty)$

Úloha 133

4.4

počet řešení rovnice $\operatorname{tg}^2 x = 0$ v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ je:

- A/ 0 B/ 1 C/ 2 D/ 3 E/ 4

Úloha 134

4.4

jestliže $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, potom číslo $\sin \alpha$ je rovno:

- A/ $\frac{1}{2}$ B/ $-\frac{1}{2}$ C/ $\frac{1}{2}$, nebo $-\frac{1}{2}$
D/ $\frac{\sqrt{3}}{2}$, nebo $\frac{1}{2}$ E/ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Úloha 135

4.3

největší hodnota funkce $f: y = (5+x)(3-x) - 1$ je:

- A/ 13 B/ 14 C/ 15 D/ 16

Řešení: 129B, 130C, 131D, 132C, 133C, 134C, 135C

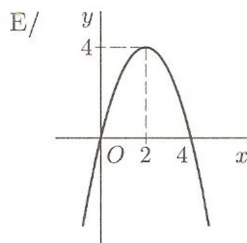
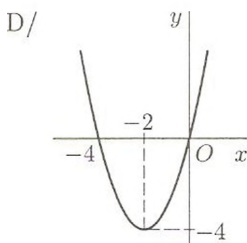
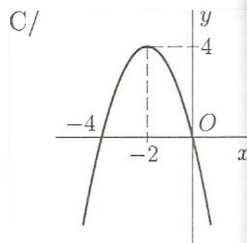
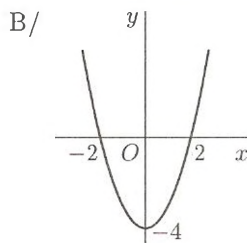
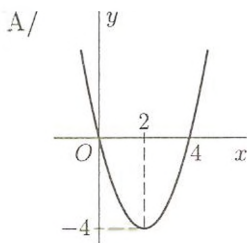
Úloha 136

Oborem hodnot funkce $y = (1 - x)(1 + x) + 2x$ je interval:

- A/ $(-\infty, 0)$ B/ $(-\infty, 2)$ C/ $\langle 0, \infty)$ D/ $\langle -1, \infty)$ E/ $\langle -2, \infty)$

Úloha 137

Graf funkce $f: y = x(4 - x)$ je na obrázku:



Úloha 138

Kvadratická funkce f , jejímž grafem je parabola s vrcholem $V[0, 5]$ a níž platí $f(-2) = -3$, je dána předpisem:

A/ $f: y = x^2 + 5$

B/ $f: y = -x^2 + 5$

C/ $f: y = -2x^2 + 5$

D/ $f: y = 2x^2 + 5$

E/ $f: y = -3x^2 + 5$

Úloha 139

Na obrázku je pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ graf funkce:

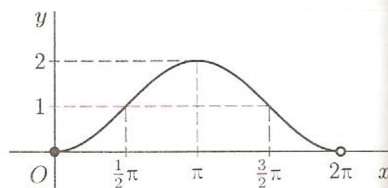
A/ $y = \cos x + 1$

B/ $y = \sin x + 1$

C/ $y = -\cos x + 1$

D/ $y = -\cos x + 2$

E/ $y = -\sin x + 2$



okružnice paraboly, která je grafem funkce $f: y = 2x^2 - 4x + 7$, leží na kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem:

$A/ r = 2\pi$ $B/ r = \sqrt{26}$ $C/ r = 5$ $D/ r = 4\sqrt{2}$ $E/ r = 6,1$

Otevřené úlohy

1. Je dána lineární funkce f prochází body $K[3, 2]$, $L[-1, 4]$.

2. Sestavte předpis pro funkci f .

3. Zjistěte, zda bod $M[6, \frac{1}{2}]$ leží na grafu funkce f .

4. Určete průsečíky grafu funkce f s osami souřadnic.

5. Určete, pro které hodnoty nezávisle proměnné jsou hodnoty funkce f větší než 2.

str. 71

1. Určete reálná čísla a , b tak, aby přímka p daná rovnicí

$$\frac{2-a}{5} \cdot x + 11y + \frac{3-b}{2} = 0$$

2. je grafem funkce $f: y = \frac{3}{4}(x+2)$.

str. 71

1. Závislost délky pružiny na hmotnosti závaží, které na ni zavěsíme, je pro závaží o hmotnosti 0 kg až 20 kg dána lineární funkcí. Při zatížení závažím o hmotnosti 2 kg má pružina délku 13 cm, při zatížení závažím o hmotnosti 8 kg má délku 25 cm.

2. Sestavte funkční předpis vyjadřující závislost délky pružiny na hmotnosti zavěšeného závaží.

3. Určete délku nezatížené pružiny.

4. Sestrojte graf závislosti délky pružiny na hmotnosti zavěšeného závaží.

str. 71

1. Je dána funkce $f: y = |3x+2| - x - 5$, $x \in (-4, 3)$.

2. Sestrojte její graf.

3. Určete obor hodnot funkce f .

4. Vypočtěte souřadnice průsečíků grafu funkce f s osami souřadnic.

str. 72

Úloha 145

4.

Je dána funkce $g: y = 4x + 3 + x^2$, $x \in \langle -4, 1 \rangle$.

- Sestrojte její graf.
- Určete obor hodnot H_g funkce g .
- Vypočítejte souřadnice průsečíků grafu funkce g s osami souřadnic.
- Určete, pro která reálná čísla x platí $g(x) \geq 3$.

str. 73

Úloha 146

4.

V teorii tenisové hry bylo zjištěno, že počet procent y úspěšných úderů závisí na relativní četnosti x počtu lobů (přehožů přes hlavu) vzhledem k počtu všech úderů. Tato závislost je popsána funkcí

$$y = 30 + 40x - 50x^2, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Určete, při jaké relativní četnosti lobů dosahuje tenista maximálního procenta úspěšných úderů. Maximální procento úspěšných úderů vypočítejte.

str. 73

Úloha 147

4.

Ze čtvercového papíru o délce strany a metrů vystříhujeme ve vrcholech menší čtverce se stranou délky x metrů a ze zbylého papíru skládáme přehnutím krabice tvaru kváдру bez víka.

- Napište předpis funkce, která vyjadřuje závislost objemu krabice na proměnné x .
- Jak se změní objem krabice vyrobené popsáním způsobem ze čtvercového papíru se stranou délky 1 m, jestliže výšku krabice zmenšíme z 0,3 m na 0,2 m?

str. 73

Úloha 148

4.

Farmář hodlá část pozemku, který z jedné strany přiléhá k dlouhé zdi, ohradit plotem tak, aby ohrazená část měla tvar pravoúhelníku. Má k dispozici 80 metrů pletiva. Určete rozměry ohrazeného pozemku tak, aby měl maximální možnou výměru.

str. 74

Úloha 149

4.

Reálná čísla a , b jsou taková, že graf funkce $f: y = a \cdot \sin x + b$ prochází body $A[\frac{1}{3}\pi, \sqrt{3} - 1]$ a $B[\pi, -1]$.

- Dokažte, že $a = 2$, $b = -1$.
- Najděte všechny průsečíky grafu funkce f s osou x , jejichž x -ové souřadnice splňují podmínku $0 \leq x \leq 2\pi$.

str. 74

4. úloha 150

4.3

Pravidelný čtyřboký hranol má délku podstavné hrany x metrů, jeho boční hrana je o 2 m delší. Délky všech hran se zvětší o 0,5 m. Ukažte, že přírůstek objemu hranolu vyjádřeného v m^3 je kvadratickou funkcí proměnné x a povrchu hranolu vyjádřeného v m^2 je lineární funkcí proměnné x

str. 74

4. úloha 151

4.3

a) Napíšte předpis pro kvadratickou funkci f , jejíž graf protíná osy souřadnic v bodech $[0, -5]$, $[-1, 0]$, $[5, 0]$.

b) Napíšte předpis pro kvadratickou funkci g , jejíž graf je souměrný s grafem funkce f z bodu a) podle:

a) osy x β) osy y

γ) počátku soustavy souřadnic

str. 75

4. úloha 152

4.3

Do funkčního předpisu

$$y = x^2 * 4x * 5$$

nahraďte na místa hvězdiček všemi možnými způsoby znaménka $+$ a $-$. Pro jaký získaný předpis určete vrchol a průsečíky s osami souřadnic paraboly, která je grafem příslušné funkce; parabolu sestojte.

str. 75

4. úloha 153

4.4

Řešte soustavu rovnic:

$$|x| = 3$$

$$|y| - 2 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x^2 - 3\pi\right)$$

str. 76

Uzavřené úlohy

Úloha 154

Biologové sledují druh tropických řas, které se velmi rychle množí. Rozloha hladiny, kterou řasy pokrývají, se každých 90 minut zdvojnásobuje. Na začátku sledování byla rozloha hladiny pokryté řasami 3 cm^2 . Za 6 hodin pokrývaly řasy:

A/ 12 cm^2 B/ 18 cm^2 C/ 24 cm^2 D/ 48 cm^2 E/ 192 cm^2

Úloha 155

V kruhové aréně cirkusu jsou v jednom ze sektorů uspořádána sedadla pro diváky tak, že v první řadě je 8 sedadel a v každé další řadě je o jedno sedadlo více než v řadě předchozí. Řad je celkem 22. Počet všech sedadel v zmíněném sektoru je:

A/ 415 B/ 400 C/ 434 D/ 389 E/ 407

Úloha 156

Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_5 - a_1 = 12$, $a_3 = 7$. Člen a_n je roven:

A/ 34 B/ 31 C/ 27 D/ 24 E/ 19

Úloha 157

Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 = -7$, $a_2 = -5$. Číslo 0 je součtem jejích prvních:

A/ 4 členů B/ 6 členů C/ 8 členů D/ 12 členů E/ 16 členů

Úloha 158

Součet

$$65 + 59 + 53 + \dots + (-7) + (-13) + (-19)$$

po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti je roven:

A/ 690 B/ 630 C/ 345 D/ 339 E/ 330

Úloha 159

V rámci restrukturalizačního programu vedení firmy na začátku ledna rozhodlo, že na konci každého čtvrtletí klesne počet zaměstnanců firmy o 5 % oproti stavu na počátku čtvrtletí. Počet procent (zaokrouhlený na desetiny) o který klesne počet zaměstnanců na konci prosince oproti stavu na počátku ledna téhož roku, je roven:

A/ 20,0 B/ 19,5 C/ 19,0 D/ 18,5 E/ 18,0

Řešení: 154D, 155E, 156A, 157C, 158C, 159D

Úloha 160

5.2

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ značí s_n součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Je dáno $s_1 = -1$ a $s_3 = 9$. První člen a_1 a diference d uvažované posloupnosti jsou:

- A/ $a_1 = -1, d = 4$ B/ $a_1 = 1, d = -4$ C/ $a_1 = -2, d = 1$
 D/ $a_1 = -1, d = 3$ E/ $a_1 = 3, d = 2$

Úloha 161

5.2

Na sedmi regálech je srovnáno 259 knih tak, že v každém následujícím regálu je 4 knihy více než v předchozím. V regálu s největším počtem knih je celkem:

- A/ 51 knih B/ 49 knih C/ 47 knih D/ 45 knih E/ 43 knih

Úloha 162

5.3

Pro geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $\frac{a_4}{a_1} = 64$ a $a_3 = 5$. Člen a_5 je roven:

- A/ 80 B/ 105 C/ 125 D/ 128 E/ 320

Úloha 163

5.1

Pro model $a_{n+1} - a_n$ v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n^2 + 2n - 3)_{n=1}^{\infty}$ je roven členáctví pro:

- A/ $n = 2$ B/ $n = 3$ C/ $n = 4$ D/ $n = 5$ E/ $n = 6$

Úloha 164

5.4

Pro výpočet počtu naučených cizích slov, která student o prázdninách zapomene, byly vypracovány dva modely:

Model 1: Během každého prázdninového týdne zapomene jednu desetinu z naučené slovní zásoby před prázdninami.

Model 2: Během každého prázdninového týdne zapomene jednu pětinu z počtu slov, která si na začátku týdne ještě pamatoval.

Na konci školního roku ovládal student 500 slov cizího jazyka. Na konci prázdninového týdne si pamatuje přibližně:

- A/ 16 slov více podle modelu (1) než podle modelu (2)
 B/ 16 slov více podle modelu (2) než podle modelu (1)
 C/ 12 slov více podle modelu (1) než podle modelu (2)
 D/ 12 slov více podle modelu (2) než podle modelu (1)
 E/ stejně slov podle obou modelů

Úloha 165

Každým rokem se ve stejnou dobu zjišťuje přírůstek objemu dřeva v lese. Přírůstek činí pravidelně $p\%$ oproti předchozímu roku. Jestliže se za deset let zvětšil objem dřeva v lese o 10% , je číslo p po zaokrouhlení na setiny rovno:

A/ 0,90 B/ 0,96 C/ 1,00 D/ 1,05 E/ 1,10

Úloha 166

Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_5 = 21$, $a_{10} = 41$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je součet prvních n členů této posloupnosti roven:

A/ $9n - 4$ B/ $4n - 1$ C/ $4n^2 - n$ D/ $2n^2 - n$ E/ $2n^2 + 3n$

Otevřené úlohy**Úloha 167**

Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50.$$

Určete její první člen a_1 a diferenci d .

str. 76

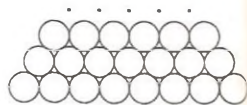
Úloha 168

Geometrická posloupnost kladných čísel má tu vlastnost, že pro její prvních tři členy a_1, a_2, a_3 platí rovnost $a_3 = 6a_1 - a_2$. Určete kvocient této posloupnosti.

str. 77

Úloha 169

Petr strádá pětikorunové mince. Dnes se mu podařilo sestavit je všechny do čtverce a pak do rovnostranného trojúhelníku. V „základně“ trojúhelníku bylo o dvě mince více než ve straně čtverce a v sousedních řadách v trojúhelníku se počet mincí lišil vždy o jednu (viz obrázek).



- Kolik mincí má Petr?
- Jakou celkovou hodnotu mají všechny mince, jimiž je tvořena čtvercová řada v trojúhelníku (počítáno od „základny“)?
- Kolik cm^2 mince pokryly, je-li průměr pětikoruny $2,8 \text{ cm}$? Výsledek zaokrouhlete na celé centimetry čtverečně.

str. 77

Sbírka: 165 B, 166 E

Velikosti vnitřních úhlů n -úhelníku (vyjádřených ve stupních) seřazené od nejmenší po největší tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Nejmenší úhel má velikost 20° , největší úhel velikost 160° .

Určete n .

Určete diferenci d příslušné aritmetické posloupnosti.

Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů daného n -úhelníku.

str. 77

Pro aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ platí, že součet jejích prvních pěti členů je 50 a součet jejího čtvrtého a pátého členu je 32.

Napište prvních pět členů této posloupnosti.

Kolik prvních členů dané posloupnosti musíme uvažovat, aby jejich součet byl větší než 1 000?

str. 78

Pro geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ platí, že součet jejího prvního a druhého členu je 240 a součet jejího druhého a třetího členu je 60. Vypočítejte první člen této posloupnosti.

str. 78

Pan Spořivý si založil osobní spořicí účet s roční úrokovou mírou 4,2 % na dobu tři let. Rozhodl se vždy na začátku roku vložit částku 8 000 Kč.

První rok se roční úroková míra snížila na 4 % a pak už se nezměnila.

Kolik částku měl pan Spořivý na účtu po třech letech, je-li roční daň z úroků 15 %?

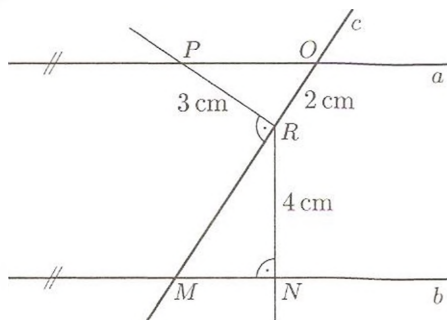
Banka stav na účtu na konci roku vždy zaokrouhluje na haléře.

str. 79

Uzavřené úlohy

Úloha 174

Na obrázku jsou rovnoběžky a , b a jejich příčka c . Vyznačeny jsou délky některých úseček.



Délka úsečky MN je:

A/ $\frac{5}{2}$ cm

B/ $\frac{7}{2}$ cm

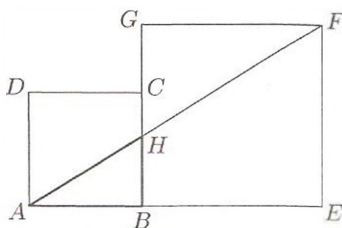
C/ 3 cm

D/ $\frac{8}{3}$ cm

E/ $\frac{9}{4}$ cm

Úloha 175

Na obrázku jsou dva čtverce $ABCD$ a $BEFG$ s délkami stran $|AB| = 5$ a $|BE| = 8$ cm. Bod H je průsečík přímek BG a AF .



Obsah trojúhelníku ABH je přibližně:

A/ $6,2 \text{ cm}^2$

B/ $7,7 \text{ cm}^2$

C/ $12,4 \text{ cm}^2$

D/ $15,4 \text{ cm}^2$

E/ $16,0 \text{ cm}^2$

Úloha 176

V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| = 29$ cm a $|BC| = 4$ cm. Na straně AD je zvolen bod E a na straně CD je zvolen bod F tak, že $|AE| = 23,4$ a $|CF| = 25,4$ cm. Délka úsečky EF je:

A/ 19,9 cm

B/ 20 cm

C/ 20,1 cm

D/ 20,2 cm

E/ 20,3 cm

ent: 174D, 175B, 176D

úloha 177

6.3

zbarvený obrázek znázorněný ve čtvercové síti se čtverci o straně délky $2\sqrt{2}\text{ cm}$ má obsah:

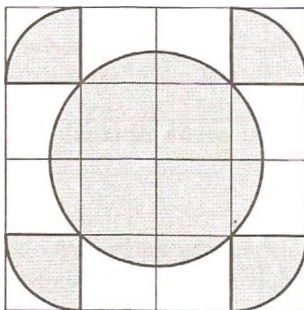
A/ $2\pi\text{ cm}^2$

B/ $2\sqrt{2}\pi\text{ cm}^2$

C/ $2\pi\text{ cm}^2$

D/ $\frac{1}{2}\pi\text{ cm}^2$

E/ $\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\text{ cm}^2$



úloha 178

6.3

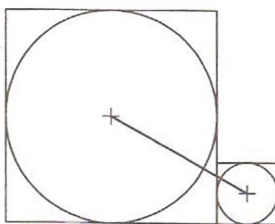
Oběma dvoutřížnými přilehlých čtverců na straně jsou 4 cm^2 a 196 cm^2 . Délka úsečky, jejíž krajní body jsou středy kružnic vepsaných těmito čtverci, je:

A/ 5 cm

B/ 9 cm

C/ 10 cm

D/ 11 cm



úloha 179

6.2

Bod E je vnitřním bodem strany BC a bod F je vnitřním bodem strany CD trojúhelníku $ABCD$ o straně délky a . Je-li $|BE| : |EC| = |CF| : |FD| = 1 : 4$, je obsah trojúhelníku AEF roven:

A/ $\frac{1}{50}a^2$

B/ $\frac{25}{50}a^2$

C/ $\frac{27}{50}a^2$

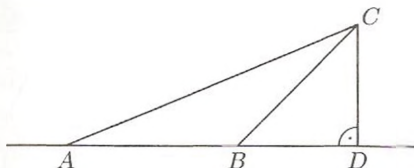
D/ $\frac{29}{50}a^2$

E/ $\frac{32}{50}a^2$

úloha 180

6.2

Na obrázku je rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AC a pravoramenný trojúhelník BCD se základnou BC . Body A, B, D leží na jedné přímce.



Měřítko úhlu ACD je rovno:

A/ $57^\circ 30'$

B/ 60°

C/ $62^\circ 30'$

D/ 65°

E/ $67^\circ 30'$

Řešení: 177C, 178C, 179A, 180E

Úloha 181

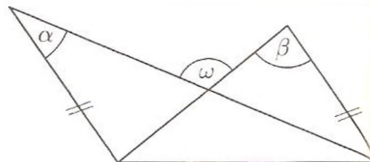
Nástěnné hodiny mají tvar pravidelného dvanáctiúhelníku. Okraj tvoří ozdobné lišty. Sousední lišty svírají úhel:

- A/ 135° B/ 144° C/ 150° D/ 156° E/ 168°

Úloha 182

Velikost úhlu ω na obrázku je rovna:

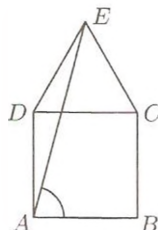
- A/ $\frac{3}{2}(\alpha + \beta)$
 B/ $\alpha + \beta$
 C/ $180^\circ - \alpha - \beta$
 D/ $180^\circ + \alpha - \beta$
 E/ $\frac{3}{2}(180^\circ - \alpha - \beta)$

**Úloha 183**

Je dán čtverec $ABCD$. Nad jeho stranou CD je sestrojen rovnostranný trojúhelník CDE (viz obrázek).

Velikost úhlu BAE je:

- A/ 70° B/ 75° C/ 80°
 D/ 73° E/ 78°

**Úloha 184**

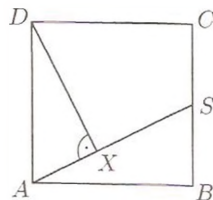
Mezikruží se středem S o vnějším poloměru r_1 a vnitřním poloměru r_2 rozděleno kružnicí se středem S a poloměrem r na dvě mezikruží, která mají stejný obsah. Platí:

- A/ $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ B/ $r = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$ C/ $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$
 D/ $r = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{2}$ E/ $r = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}$

Úloha 185

Ve čtverci $ABCD$ se stranou délky 10 cm je S střed strany BC a X pata kolmice sestrojené z bodu D k úsečce AS (viz obrázek). Délka úsečky DX je:

- A/ 6 cm B/ 8 cm C/ $4\sqrt{5}$ cm
 D/ $5\sqrt{3}$ cm E/ $5\sqrt{2}$ cm

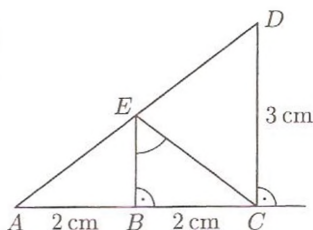


nt: 181C, 182B, 183B, 184E, 185C

6.2

úloha 186

h. v. úloha 186 jsou uvedeny délky některých
 úseček v pravoúhlém trojúhelníku ACD .
 Úhlost úhlu BEC je přibližně:



- B/ 50° C/ 53°
 E/ 60°

6.3

úloha 187

úhelník, který je středově souměrný, ale není osově souměrný, je:

- B/ obdélník C/ kosodélník D/ lichoběžník

6.2

úloha 188

určit vzdálenosti je od země vidět tovární komín pod zorným úhlem 45°
 je vzdálenosti o 20 m větší je vidět pod zorným úhlem 30° . Výška komínu

- B/ 27,3 m C/ 29,5 m D/ 31,2 m E/ 34,2 m

6.4

úloha 189

troj. výše mezikruží s hraničními kružnicemi o poloměrech 2 m a 1 m
 středovým úhlem o velikosti 60° je:

- B/ $(\pi + 2)$ m C/ $(2\pi + 2)$ m
 E/ $(\frac{3}{2}\pi + 2)$ m

6.2

úloha 190

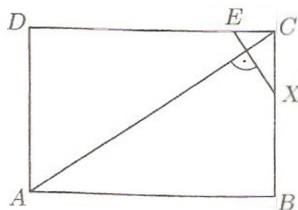
ú. 5 je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Polopřímky SA , SB
 SC rozdělují rovinu na tři úhly o velikostech 112° , 122° a 126° . Vnitřní
 ú. trojúhelníku ABC mají velikosti:

- B/ 52° , 62° a 66° C/ 44° , 64° a 72°
 E/ 48° , 64° a 68°

6.2

úloha 191

ú. ú. obdélník $ABCD$ s délkami stran
 $|AB| = 18$ cm a $|BC| = 12$ cm. Na stra-
 BCD je zvolen bod E tak, že $|CE| = 3$ cm.
 ú. ú. strany BC a přímky, která je
 ú. ú. k úhlopříčce AC a prochází bo-
 ú. ú. E , je označen X (viz obrázek). Délka
 ú. ú. BX je:



- B/ 7,4 cm C/ 7,2 cm
 E/ 7,6 cm

Řešení: 186C, 187C, 188B, 189B, 190C, 191A

Úloha 192

6.3

Je dán obdélník $ABCD$ s délkami stran $|AB| = 8\text{ cm}$ a $|BC| = 3,5\text{ cm}$ a bod E , který leží na jeho straně BC . Úsečka AE rozděluje obdélník $ABCD$ na dvě části – trojúhelník ABE a lichoběžník $AECD$, jejichž obsahy jsou v poměru $1 : 6$. Poměr délek úseček BE a CE je:

A/ $1 : 6$ B/ $1 : 5$ C/ $2 : 7$ D/ $2 : 5$ E/ $3 : 10$

Úloha 193

6.4

Je dán čtverec $ABCD$ se stranou délky a a bod R , který je středem jeho strany CD . Poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABR je:

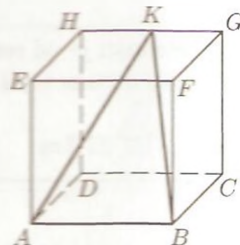
A/ $\frac{3}{5}a$ B/ $\frac{5}{8}a$ C/ $\frac{4}{7}a$ D/ $\frac{5}{9}a$ E/ $\frac{6}{11}a$

Úloha 194

6.2

Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a a bod K , který je středem její hrany GH (viz obrázek). Obsah trojúhelníku ABK je:

A/ $\frac{1}{5}\sqrt{6}a^2$ B/ $\frac{1}{2}\sqrt{2}a^2$ C/ $\sqrt{2}a^2$
D/ $\frac{1}{2}\sqrt{3}a^2$ E/ $\frac{1}{3}\sqrt{2}a^2$

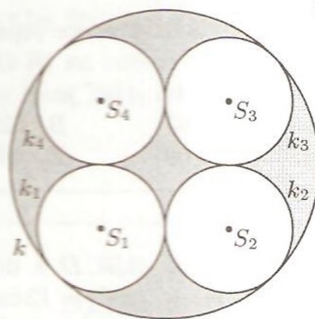


Otevřené úlohy

Úloha 195

6.4

Kružnicím $k_1(S_1; 2\text{ cm})$, $k_2(S_2; 2\text{ cm})$, $k_3(S_3; 2\text{ cm})$, $k_4(S_4; 2\text{ cm})$, které se dotýkají tak jako na obrázku, je opsána kružnice $k(S; R)$. Vypočítejte obsah podbarveného útvaru.



str. 79

Úloha 196

6.1

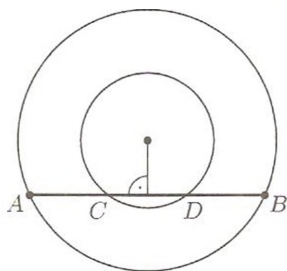
V geodetické síti byly zjištěny vzdálenosti bodů A , B a C : $|AB| = 13,2\text{ km}$, $|BC| = 7,4\text{ km}$ a $|CA| = 9,6\text{ km}$. Bod D je stejně vzdálen od přímek AC a AB a úsečka BC je z tohoto bodu vidět pod úhlem 90° . Zobraďte vzájemnou polohu bodů A , B , C , D v měřítku $1 : 200\,000$.

str. 80

Řešení: 192D, 193B, 194B

Úloha 197

Na obrázku jsou dvě soustředné kružnice o poloměrech 33 cm a 17 cm. Tětiva AB větší kružnice je rozdělena svými průsečíky C, D s menší kružnicí na tři shodné úseky. Určete délku tětivy AB .



6.4

ŘEŠENÍ

str.80

Úloha 198

Výška a základny rovnoramenného lichoběžníku mají délky v poměru $2 : 3 : 5$, obsah lichoběžníku je 2048 cm^2 . Určete délku ramene lichoběžníku.

6.3

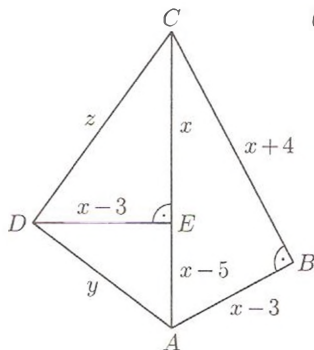
str.81

Úloha 199

Je dán čtyřúhelník $ABCD$ – viz obrázek, v němž jsou vyznačeny číselné hodnoty (v cm) délek jednotlivých úseček vyjádřené pomocí neznámých x, y, z .

a) Vypočtete x, y, z .

b) Určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

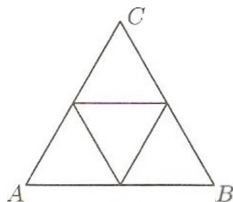


6.3

str.81

Úloha 200

Rovnostranný trojúhelník ABC je tvořen čtyřmi malými rovnostrannými trojúhelníky (viz obrázek). Vypočtete obvod trojúhelníku ABC , jestliže obsah každého z malých trojúhelníků je $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

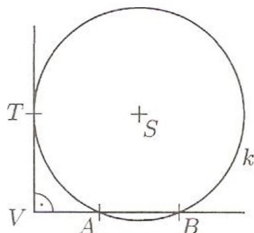


6.2

str.82

Úloha 201

Kružnice k se středem S se v bodě T dotýká jednoho z ramen pravého úhlu s vrcholem V a druhé rameno tohoto úhlu protíná v bodech A a B , $|VA| = a$, $|VB| = b$, $b > a$ (viz obrázek). Vypočtete délku úsečky VT .



6.4

str.82

Úloha 202

6.2

Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC má tu vlastnost, že jeho těžnice z vrcholů B a C leží na dvou navzájem kolmých přímkách (viz obrázek). Obsah trojúhelníku ABC je 30 cm^2 . Jakou délku má rameno AB ?



Úloha 203

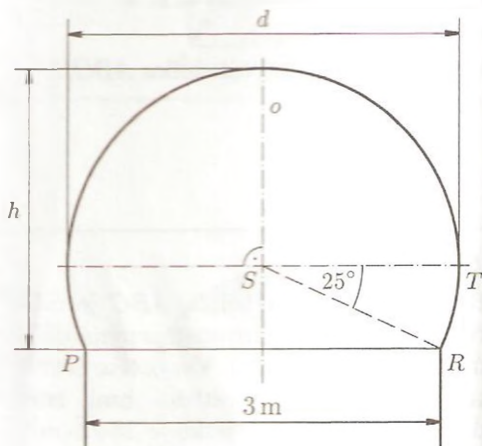
6.2

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C dělí těžnice z vrcholu C , jejíž délka je 6 cm , pravý úhel v poměru $1 : 2$. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC .

Úloha 204

6.4

V islámské architektuře je užíván oblouk znázorněný na obrázku obloukem kružnice se středem S . V bodech P, R na něj navazují dvě úsečky rovnoběžné se svislou osou o oblouku. Vzdálenost úseček je 3 m , $\angle TSR = 25^\circ$. Vypočítejte výšku h a šířku d stavebního oblouku.



Úloha 205

6.5

Představte si, že jste stavebním inženýrem, který má vypracovat projekt šikmého mostu přes řeku, a vyřešte následující úlohu: Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q a bod M , který na žádné z nich neleží. Sestrojte přímku m procházející bodem M a protínající přímky p, q po řadě v bodech P, Q , které jsou od sebe vzdáleny $d \text{ cm}$; d je dané kladné číslo.

7 STEREOMETRIE

ŘEŠENÍ

Uzavřené úlohy

Úloha 206

7.1

Poloměr koule opsané dané krychli je k -krát větší než poloměr koule této krychli vepsané, kde:

A/ $k = 2$ B/ $k = 4$ C/ $k = \sqrt{2}$ D/ $k = 2\sqrt{2}$ E/ $k = \sqrt{3}$

Úloha 207

7.1

Úhlopříčka podstavy a výška pravidelného čtyřbokého jehlanu mají stejnou délku u . Objem jehlanu je:

A/ $\frac{1}{6}u^3$ B/ $\frac{1}{3}u^3$ C/ $\frac{1}{2}u^3$ D/ $\frac{2}{3}u^3$ E/ $\frac{4}{3}u^3$

Úloha 208

7.1

Krychle má povrch 54 cm^2 . Její tělesová úhlopříčka má délku:

A/ $3\sqrt{3}\text{ cm}$ B/ $2\sqrt{6}\text{ cm}$ C/ $3\sqrt{3}\sqrt{2}\text{ cm}$
D/ $3\sqrt{6}\text{ cm}$ E/ $4\sqrt{3}\text{ cm}$

Úloha 209

7.1

Do krychle $ABCDEFGH$ je vepsán čtyřboký jehlan $PQRSV$ tak, že jeho hlavní vrchol V je středem stěny $EFGH$ a vrcholy P, Q, R, S jeho podstavy jsou středy hran AB, BC, CD, DA . Poměr objemu jehlanu a objemu krychle je:

A/ $1:3$ B/ $1:4$ C/ $1:6$ D/ $1:8$ E/ $1:12$

Úloha 210

7.1

Průnik krychle $ABCDEFGH$ a roviny KLH , kde K je vnitřní bod hrany AB a L je vnitřní bod hrany BC , je:

A/ trojúhelník B/ čtyřúhelník C/ pětiúhelník D/ šestiúhelník

Úloha 211

7.1

Rovnostranný kužel, jehož délka strany a průměr podstavy jsou rovny d , má objem:

A/ $\frac{\pi d^3 \sqrt{2}}{6}$ B/ $\frac{\pi d^3 \sqrt{3}}{8}$ C/ $\frac{\pi d^3 \sqrt{2}}{24}$ D/ $\frac{\pi d^3 \sqrt{3}}{12}$ E/ $\frac{\pi d^3 \sqrt{3}}{24}$

Úloha 212

7.1

Na cívice je navinut ocelový drát s průměrem $0,5\text{ mm}$ o celkové hmotnosti $0,5\text{ kg}$. Hustota oceli je $8000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Délka drátu je přibližně:

A/ 80 m B/ 120 m C/ 250 m D/ 300 m E/ 320 m

Řešení: 206E, 207A, 208A, 209C, 210C, 211E, 212E

Úloha 213

7.1

Ruční porcevač zmrzliny zformuje 5 cl mraženého krému do polokoule. Průměr této polokoule je přibližně:

- A/ 50 mm B/ 52 mm C/ 54 mm D/ 56 mm E/ 58 mm

Úloha 214

7.1

Čtverec se stranou délky 6 cm se otáčí kolem úhlopříčky. Objem vzniklého rotačního tělesa je:

- A/ $18\pi\sqrt{2}\text{ cm}^3$ B/ $18\pi\sqrt{3}\text{ cm}^3$ C/ $36\pi\sqrt{2}\text{ cm}^3$ D/ $36\pi\sqrt{3}\text{ cm}^3$

Úloha 215

7.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Odchylka přímek EG a BG je:

- A/ 90° B/ 75° C/ 60° D/ 45° E/ 30°

Úloha 216

7.1

Součet obsahů obou podstav válce o výšce 7 cm je roven obsahu jeho pláště. Objem tohoto válce je:

- A/ 343 cm^3 B/ $343\pi\text{ cm}^3$ C/ 245 cm^3 D/ $245\pi\text{ cm}^3$ E/ $252\pi\text{ cm}^3$

Úloha 217

7.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 1 dm. Vzdálenost bodu F od přímky AC je:

- A/ $\frac{1}{2}\sqrt{6}\text{ dm}$ B/ $\frac{1}{3}\sqrt{3}\text{ dm}$ C/ $\frac{1}{4}\sqrt{3}\text{ dm}$ D/ $\frac{1}{3}\sqrt{2}\text{ dm}$ E/ $\frac{1}{4}\sqrt{2}\text{ dm}$

Úloha 218

7.1

Při melioračních pracích je hlouben přímý meliorační kanál dlouhý 80 m. Kolmý průřez kanálu má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 4 m a 2 m a výškou 1,2 m. Cena za přemístění 1 m^3 zeminy je 450 Kč. Přemístění veškeré vykopané zeminy stojí:

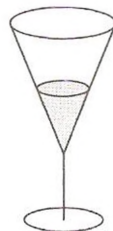
- A/ 86 400 Kč B/ 108 600 Kč C/ 112 300 Kč
D/ 122 800 Kč E/ 129 600 Kč

Úloha 219

7.1

Nádoba na obrázku má tvar pláště rotačního kuželu a je zaplněna vodou do jedné poloviny své výšky. Poměr objemu vody a objemu nádoby je:

- A/ 1 : 3 B/ 1 : 4 C/ 1 : 6
D/ 1 : 8 E/ 1 : 12



Řešení: 213E, 214C, 215C, 216B, 217A, 218E, 219D

Úloha 220

7.1

V krychli $ABCDEFGH$ je bod K středem hrany AB a bod L středem hrany FG . Pro odchylku α přímek KL a FG platí:

A/ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

B/ $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

C/ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

D/ $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$

E/ $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$

Úloha 221

7.1

Zvětší-li se poloměr koule o 50 %, zvětší se její povrch o:

A/ 50 %

B/ 100 %

C/ 125 %

D/ 225 %

E/ 237,5 %

Úloha 222

7.1

Středy hran krychle o hraně délky 1 dm tvoří vrcholy čtrnáctistěnu (viz obrázek). Objem tohoto čtrnáctistěnu je:

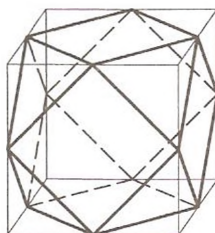
A/ $\frac{2}{3} \text{ dm}^3$

B/ $\frac{3}{4} \text{ dm}^3$

C/ $\frac{3}{5} \text{ dm}^3$

D/ $\frac{4}{5} \text{ dm}^3$

E/ $\frac{5}{6} \text{ dm}^3$



Úloha 223

7.1

Tři míčky jsou uloženy v plechovce tvaru válce tak jako na obrázku; navzájem se dotýkají a dotýkají se i stěn plechovky. Poměr objemu všech tří míčků a objemu plechovky je:

A/ 1 : 2

B/ 1 : 3

C/ 2 : 3

D/ 3 : 4

E/ 5 : 8



Úloha 224

7.1

Střecha sportovní haly má tvar poloviny rotační válcové plochy; výška příslušného válce je větší než jeho průměr (viz obrázek). Obsah střechy je 433 m^2 . Jestliže poměr délky a šířky haly je 8 : 3, jsou tyto rozměry přibližně:

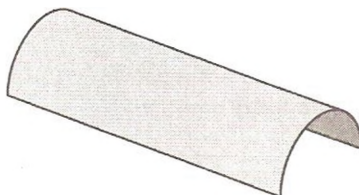
A/ 21 m a 8 m

B/ 27,1 m a 10,2 m

C/ 25 m a 10,5 m

D/ 24 m a 9 m

E/ 22,5 m a 8,5 m



Řešení: 220 D, 221 C, 222 E, 223 C, 224 B

Úloha 225

7.1

Pravidelný čtyřboký hranol má povrch 102 cm^2 a obsah pláště 84 cm^2 . Výška tohoto hranolu je:

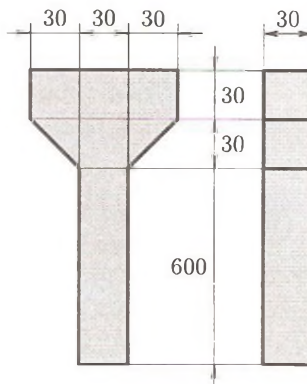
- A/ 55 mm B/ 60 mm C/ 64 mm D/ 70 mm E/ 75 mm

Úloha 226

7.1

Betonový sloup má tvar kolmého osmibokého hranolu, jeho nárys, bokorys a rozměry v centimetrech vidíte na obrázku. Objem betonu použitého na výrobu sloupu je:

- A/ $0,54 \text{ m}^3$ B/ $0,6 \text{ m}^3$
C/ $0,625 \text{ m}^3$ D/ $0,65 \text{ m}^3$
E/ $0,625 \text{ m}^3$

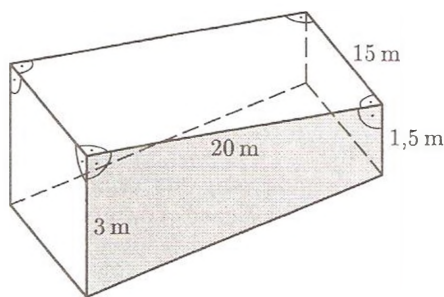


Otevřené úlohy

Úloha 227

7.1

Plavecký bazén se šikmým dnem má tvar čtyřbokého kolmého hranolu s podstavou tvaru pravoúhlého lichoběžníku (podstavou je podbarvená stěna bazénu). Délka bazénu je 20 m, šířka 15 m, největší hloubka 3 m, nejmenší hloubka 1,5 m (viz obrázek). Nátěr 1 m^2 stojí 80 Kč. Při výpočtu celkové ceny se obsah natřené plochy zaokrouhluje na setiny metrů čtverečních a výsledná cena se zaokrouhluje na celé koruny. Kolik stojí nátěr vnitřku bazénu?



Úloha 228

7.1

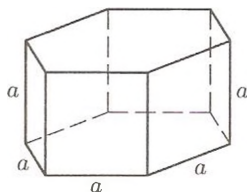
Obsahy stěn krabice, která má tvar kvádru, jsou $27,3 \text{ dm}^2$, $33,6 \text{ dm}^2$ a 52 dm^2 . Jaký je objem krabice?

Úloha 229

7.1

Podstavami kolmého hranolu jsou pravidelné šestiúhelníky se stranami délky a a jeho bočními stěnami jsou čtverce.

- Kolika různých hodnot nabývají délky tělesových úhlopříček daného hranolu?
- Vypočítejte délky všech jeho tělesových úhlopříček.



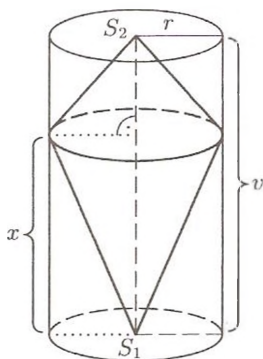
str. 86

Úloha 230

7.1

Do rotačního válce s výškou v a poloměrem r jsou vepsány dva rotační kužely se společnou podstavou a s vrcholy ležícími ve středech podstav válce; vzdálenost podstavy kuželů od jedné z podstav válce je x (viz obrázek).

- Vyjádřete závislost součtu objemů obou kuželů na vzdálenosti x .
- Rozhodněte, pro kterou vzdálenost x je součet objemů obou kuželů maximální.
- Vyjádřete v závislosti na vzdálenosti x , kolik procent objemu válce tvoří součet objemů obou kuželů.

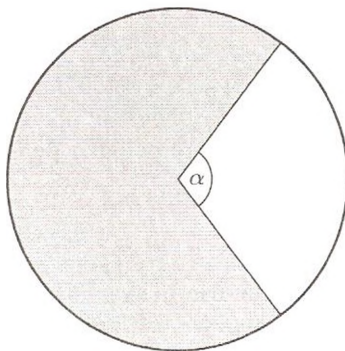
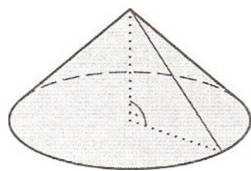


str. 87

Úloha 231

7.1

Vietnamský klobouk má tvar pláště rotačního kuželu, jehož výška je rovna poloměru jeho podstavy (obrázek vlevo). Klobouk můžeme zhotovit z kruhu papíru, z něhož odstříhneme výseč se středovým úhlem velikosti α (obrázek vpravo).



Určete velikost úhlu α .

str. 88

Úloha 232

7.1

Průměr podstavy válce C_1 je roven jeho výšce, válec C_2 má poloviční poloměr podstavy a dvojnásobnou výšku než válec C_1 . Určete poměr povrchu S_1 válce C_1 a povrchu S_2 válce C_2 .

Úloha 233

7.1

Polokoule a rotační kužel mají stejný objem. Poloměr polokoule je r a poloměr podstavy kuželu je také r .

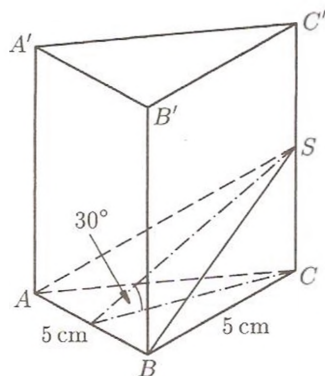
a) Vypočtete výšku v kuželu.

b) Které z obou těles má větší povrch? O kolik procent?

Úloha 234

7.1

Podstavou kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 5 cm. Rovina procházející podstavnou hranou AB a středem S boční hrany CC' svírá s rovinou podstavy ABC úhel o velikosti 30° (viz obrázek). Vypočtete obsah pláště hranolu $ABCA'B'C'$.



Úloha 235

7.1

Střecha má tvar pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky $a = 6,4$ m a výškou boční stěny $w = 4$ m.

a) Vypočtete obsah střechy.

b) Jaký objem má půdní prostor pod střechou?

c) Vypočtete odchylku boční hrany střechy od podlahy půdy.

Úloha 236

7.1

Do rotačního kuželu s výškou 1 m a poloměrem podstavy 0,5 m je vepsán rotační válec (roviny podstav obou těles splývají). Obsah pláště vepsaného válce je $\frac{1}{4}\pi \text{ m}^2$. Určete poloměr podstavy a výšku válce.

Úloha 237

7.1

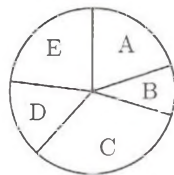
Z dřevěné klády tvaru rotačního komolého kuželu s průměry podstav 16 cm a 26 cm a výškou 6 m byl vyroben trám tvaru hranolu délky 6 m s co možná největším čtvercovým průřezem. Kolik procent objemu dřeva při tom tvořilo odpad?

Uzavřené úlohy

Úloha 238

8.1

Kruhový diagram vyjadřuje v procentech volební preference pěti politických stran. Jsou-li volební preference strany A znázorněny kruhovou výsečí se středovým úhlem velikosti 72° , jsou preference této strany:



A/ 15 % B/ 20 % C/ 25 % D/ 30 %

Úloha 239

8.1

Aritmetický průměr tří čísel je 38,4. Je-li součet dvou z nich 77,4, je třetí číslo:

A/ 47,9 B/ 39,0 C/ 38,4 D/ 37,8 E/ 19,5

Úloha 240

8.1

Firma VÍTR má tři divize – řízení, výroby a odbytu. V divizi řízení pracuje 20 zaměstnanců a jejich průměrný plat je 15 600 Kč, v divizi výroby pracuje 40 zaměstnanců a jejich průměrný plat je 12 300 Kč a v divizi odbytu pracuje 30 zaměstnanců a jejich průměrný plat je 14 300 Kč. Průměrný plat všech zaměstnanců firmy činí:

A/ 14 100 Kč B/ 13 700 Kč C/ 13 900 Kč
D/ 14 300 Kč E/ 13 500 Kč

Úloha 241

8.1

Každý z n stromků v sadu vyrostl za 5 let do dvojnásobné výšky. Průměrná výška všech n stromků se za těchto 5 let zvětšila:

A/ dvakrát B/ čtyřikrát C/ $\sqrt{2}$ -krát D/ $\sqrt{n}$ -krát E/ $\frac{1}{2}n$ -krát

Úloha 242

8.1

Majitel stavební firmy vyplatil za řádné splnění zakázky každému ze šesti pomocníků stejnou částku, každému ze čtyř zedníků také stejnou částku, ale vyšší než pomocníkům, nejvyšší částku vyplatil mistrovi. Průměrná vyplacená částka byla 6 730 Kč. Později se majitel firmy rozhodl vyplatit ještě každému z uvedených pracovníků 10 % částky, kterou mu vyplatil původně. Průměrná dodatečně vyplacená částka:

A/ byla menší než 673 Kč
B/ byla 673 Kč
C/ byla větší než 673 Kč
D/ nemůže být na základě uvedených informací jednoznačně určena

Řešení: 238B, 239D, 240B, 241A, 242B

Úloha 243

8.1

Několik jablek má průměrnou hmotnost 180 g. Kdybychom k nim přidali jedno jablko o hmotnosti 210 g, zvětšila by se průměrná hmotnost jablek o 3 g. Počet jablek je:

A/ 5, nebo 6

B/ 7, nebo 8

C/ 9, nebo 10

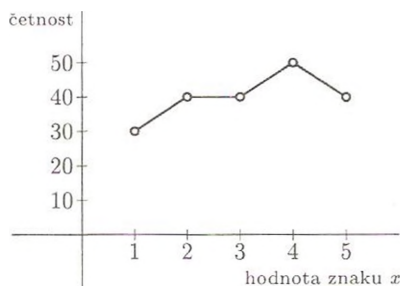
D/ 11, nebo 12

E/ 13, nebo 14

Úloha 244

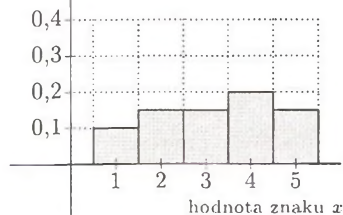
8.1

Na obrázku je spojnicový diagram, který znázorňuje četnosti všech pěti hodnot znaku x .

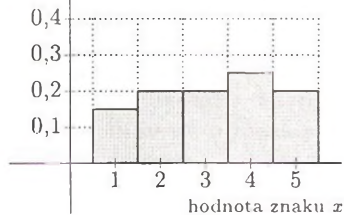


Sloupkový diagram znázorňující relativní četnosti hodnot tohoto znaku je na obrázku:

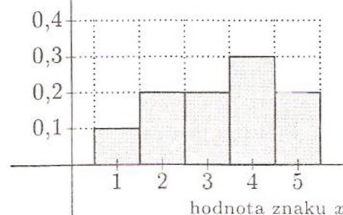
A/ relativní četnost



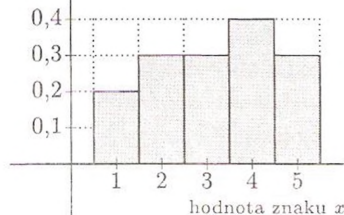
B/ relativní četnost



C/ relativní četnost



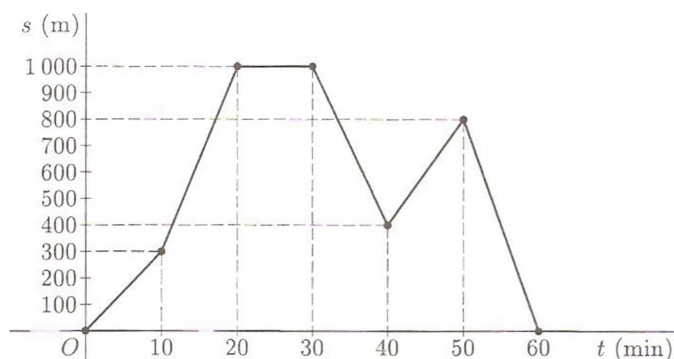
D/ relativní četnost



Řešení: 243C, 244B

Úloha 245**8.1****ŘEŠEN**

Martina si při návštěvě cizího města jednu hodinu prohlížela výlohy v přímé ulici. Její vzdálenost od místa, kde prohlídku začala a také skončila, je popsána grafem, ze kterého je vidět, že se prvních 10 minut pohybovala rovnoměrně rychlostí 1,8 km/h, dalších 10 minut opět rovnoměrně, ale rychlostí 4,2 km/h, atd.



Průměrná rychlost Martiny během hodinové prohlídky výloh obchodů byla:
 A/ 2,2 km/h B/ 2,4 km/h C/ 2,6 km/h D/ 2,8 km/h E/ 3 km/h

Úloha 246**8.1**

Deset hráčů soutěžilo v hodu na koš. První hráč získal 11 bodů, druhý 8 bodů, třetí také 8 bodů, čtvrtý dosáhl aritmetického průměru počtů bodů prvních tří hráčů. Podobně pátý a každý další hráč získal počet bodů, který se rovná aritmetickému průměru počtů bodů všech hráčů, kteří házeli na koš před ním. Desátý hráč získal:

A/ 7 bodů B/ 8 bodů C/ 9 bodů D/ 10 bodů E/ 11 bodů

Otevřené úlohy**Úloha 247****8.1**

Tělesné výšky žáků jedné třídy zemědělského učiliště v městě B jsou vyhodnoceny v tabulce:

Výška (cm)	145–154	155–159	160–164	165–169	170–174	175–179	180–189
Počet žáků	3	3	5	5	8	6	5

Vypočtete nejmenší možnou a největší možnou průměrnou výšku žáků této třídy zaokrouhlenou na centimetry.

str. 92

Řešení: 245D, 246C

Úloha 248

8.1

Na sportovní utkání chce obec prodávat vstupenky za jednotnou cenu, a to buď 50 Kč, nebo 100 Kč, nebo 150 Kč, nebo 200 Kč. Podle předběžného průzkumu je 218 zájemců ochotno koupit si vstupenku nejvýše za 50 Kč, dalších 205 zájemců vstupenku nejvýše za 100 Kč, dalších 148 zájemců vstupenku nejvýše za 150 Kč a pouze dalších 76 zájemců vstupenku až do ceny 200 Kč. Při jaké ceně vstupenky bude mít obec nejvyšší zisk?

str. 92

Úloha 249

8.1

Vojáci čtyř rot jednoho vojenského praporu byli testováni na fyzickou zdatnost. Každý obdržel známku od 1 (nejlepší) do 5 (nejhorší). Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

	1	2	3	4	5
1. rota	4	3	13	5	2
2. rota	4	6	10	4	5
3. rota	5	9	3	3	3
4. rota	4	7	11	4	4

- Jaká byla průměrná známka v celém praporu? Počítejte s přesností na dvě desetinná místa.
- Která rota byla v průměru nejlepší a která nejhorší?
- Určete četnosti jednotlivých známek v celém praporu a sestrojte příslušný polygon četností.
- Určete relativní četnosti (v procentech) jednotlivých známek v celém praporu s přesností na dvě desetinná místa.

str. 93

Úloha 250

8.1

Výsledky srovnávací písemné práce z matematiky v sousedních maturitních třídách IV.A a IV.B gymnázia v městě N jsou zachyceny v tabulce:

Známka	1	2	3	4	5
IV.A	6	11	8	2	3
IV.B	4	8	7	6	0

- Vypočtete průměrnou známku z_A ve třídě IV.A, průměrnou známku z_B ve třídě IV.B i průměrnou známku z v obou třídách dohromady. Počítejte s přesností na dvě desetinná místa.
- Třída, do které chodí Marek, dopadla v průměru hůř než sousední třída. Kdyby ale Marek napsal písemnou práci lépe, mohla být průměrná známka v jeho třídě lepší než ve třídě sousední. Do které třídy Marek chodí a jakou známku z písemné práce dostal?

str. 94

ŘEŠENÍ OTEVŘENÝCH ÚLOH

1 Číselné množiny

Řešení úlohy 19

Délka nového hřiště:

$$0,85 \cdot 40 \text{ m} = 34 \text{ m}$$

Šířka nového hřiště:

$$1,3 \cdot 15 \text{ m} = 19,5 \text{ m}$$

Obsah plochy původního hřiště:

$$S_1 = (40 \cdot 15) \text{ m}^2 = 600 \text{ m}^2$$

Obsah plochy nového hřiště:

$$S_2 = (34 \cdot 19,5) \text{ m}^2 = 663 \text{ m}^2$$

Protože

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{663 \text{ m}^2}{600 \text{ m}^2} = 1,105,$$

je obsah plochy nového hřiště o 10,5 % větší než obsah plochy původního hřiště.

Řešení úlohy 20

a) 1 den = $24 \cdot 3\,600 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}$

Objem vody za 1 den: $86\,400 \cdot 0,1 \text{ cm}^3 = 8\,640 \text{ cm}^3 = 8,64 \text{ litru}$

Za jeden den odkape 8,64 litru vody.

b) Objem vody za 1 rok: $(8,64 \text{ litru}) \cdot 365 = 3\,153,6 \text{ litru} = 3,1536 \text{ m}^3$

Za jeden rok odkape $3,1536 \text{ m}^3$ vody.

c) Objem akvária: $(30 \cdot 30 \cdot 40) \text{ cm}^3 = 36\,000 \text{ cm}^3$

Doba naplnění akvária: $(36\,000 \text{ cm}^3) : \left(0,1 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right) = 360\,000 \text{ s} = 100 \text{ h}$

Akvárium se naplní za 100 hodin, tj. za 4 dny a 4 hodiny.

Řešení úlohy 21

Všechna ozubená kola se otočí o stejný počet zubů. Aby byla ve stejné vzájemné poloze, musí být tento počet zubů násobkem počtu zubů každého ozubeného kola.

$$15 = 3 \cdot 5, \quad 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 819 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$$

$$n(15, 105, 819) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 4\,095$$

Prostřední kolo se o 4 095 zubů otočí při $\frac{4\,095}{105}$, tj. 39 otáčkách.

Ozubená kola budou ve stejné vzájemné poloze po každém násobku 39 otáček prostředního kola.

Řešení úlohy 22

- a) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(2n - 1) + 2n + 1 = 4n$. Uvažovaný součet je proto dělitelný čtyřmi.
- b) Není, neboť platí $2n + (2n + 1) + 1 = 4n + 2 = 2(2n + 1)$ a toto číslo je dělitelné pouze dvěma, nikoliv čtyřmi.
- c) Je, neboť platí
- $$(2n)^2 + (2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(2n + 1).$$

Řešení úlohy 23

- a) $\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = 7 - 4\sqrt{3}$
- b) $2 - \sqrt{3} > 0$, $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$
- c) $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left[\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{4}\right)^2 = (2 - \sqrt{3})^2 =$
$$= \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$

Řešení úlohy 24

- a) $A_r(\text{Na}) : A_r(\text{N}) : A_r(\text{O}) = 23 : 14 : (3 \cdot 16) = 23 : 14 : 48$
Na: $\frac{23}{85} \doteq 0,271$, tj. asi 27,1 %
N: $\frac{14}{85} \doteq 0,165$, tj. asi 16,5 %
O: $\frac{48}{85} \doteq 0,565$, tj. asi 56,5 %
- b) Hmotnosti jednotlivých prvků:
Na: $\frac{23}{85} \cdot 595 \text{ g} = 161 \text{ g}$, N: $\frac{14}{85} \cdot 595 \text{ g} = 98 \text{ g}$, O: $\frac{48}{85} \cdot 595 \text{ g} = 336 \text{ g}$
- c) Počet gramů NaNO_3 označme x .
Víme, že $\frac{48}{85} \cdot x = 624$. Odtud $x = \frac{85 \cdot 624}{48} = 1\,105$.
Máme k dispozici 1 105 g dusičnanu sodného.

Řešení úlohy 25

- a) Bílek: 60 % hmotnosti vejce
Výživné látky v bílku: $(100 - 85) \% = 15 \%$ hmotnosti bílku
15 % z 60 %: $\frac{15}{100} \cdot 60 \% = 9 \%$
Výživné látky v bílku tvoří 9 % hmotnosti vejce.
- b) Žloutek: $(100 - 10 - 60) \% = 30 \%$ hmotnosti vejce
Voda v žloutku: 60 % hmotnosti žloutku
60 % z 30 %: $\frac{60}{100} \cdot 30 \% = 18 \%$
18 % z 47,5 g: $\frac{18}{100} \cdot 47,5 \text{ g} = 8,55 \text{ g}$
Hmotnost vody v žloutku je 8,55 g.

- c) Výživné látky v bílku: 9 % hmotnosti vejce [viz a)]
 9 % z 47,5 g: $\frac{9}{100} \cdot 47,5 \text{ g} = 4,275 \text{ g}$
 Žloutek: 30 % hmotnosti vejce
 Výživné látky v žloutku: $(100 - 60) \% = 40 \% \text{ hmotnosti žloutku}$
 40 % z 30 %: $\frac{40}{100} \cdot 30 \% = 12 \%$
 12 % z 47,5 g: $\frac{12}{100} \cdot 47,5 \text{ g} = 5,7 \text{ g}$
 Výživných látek celkem: $4,275 \text{ g} + 5,7 \text{ g} = 9,975 \text{ g}$
 Hmotnost výživných látek v celém vejci je 9,975 g.

Řešení úlohy 26

- Ocelová část mince: $\frac{94}{100} = \frac{47}{50}$ hmotnosti mince
 Mosazná část mince: $\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$ hmotnosti mince
 Podíl mědi: $\frac{62}{100}$ mosazné části, tj.
 $\frac{62}{100} \cdot \frac{3}{50} = \frac{93}{2\,500}$ hmotnosti mince
 Podíl zinku: $\frac{38}{100}$ mosazné části, tj.
 $\frac{38}{100} \cdot \frac{3}{50} = \frac{57}{2\,500}$ hmotnosti mince
 Postupný poměr hmotností mědi, zinku a oceli:
 $\frac{93}{2\,500} : \frac{57}{2\,500} : \frac{47}{50} = 93 : 57 : 2\,350$

2 Algebraické výrazy

Řešení úlohy 50

- a) Výraz $V(m)$ má smysl pro všechna $m \in \mathbb{R}$, pro která platí
 $m^2 - 4m - 12 \neq 0$, neboli $(m - 6) \cdot (m + 2) \neq 0$,
 tedy právě pro $m \in \mathbb{R} \setminus \{6, -2\}$.
- b) $V(m) = \frac{2(36 - m^2)}{(m - 6)(m + 2)} = \frac{2(6 - m)(6 + m)}{-(6 - m)(m + 2)} = -\frac{12 + 2m}{m + 2}$
- c) $V(-1) = \frac{72 - 2 \cdot (-1)^2}{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12} = \frac{72 - 2}{1 + 4 - 12} = \frac{70}{-7} = -10$
- d) $V(m) = 0 \iff (72 - 2m^2 = 0 \text{ a zároveň } m^2 - 4m - 12 \neq 0)$
 Vyřešme rovnici $72 - 2m^2 = 0$:

$$72 - 2m^2 = 0$$

$$m^2 = 36$$

$$m = 6 \text{ nebo } m = -6$$

 Tedy $V(m) = 0$, jestliže $m \in \{6, -6\}$ a zároveň $m \notin \{6, -2\}$.
 Daný výraz má hodnotu nula pouze pro $m = -6$.

Řešení úlohy 51

- a) Podmínky: $a = 0, b \neq 0$ nebo $a \neq 0, b > 0$

Pro $a = 0, b \neq 0$: $(a^{12}b^{-3})^{\frac{1}{6}} = 0$

Pro $a \neq 0, b > 0$: $(a^{12}b^{-3})^{\frac{1}{6}} = a^2b^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{b}}$

b) $\left[(\sqrt{3})^{12} \cdot 36^{-3}\right]^{\frac{1}{6}} = (\sqrt{3})^2 \cdot 36^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Řešení úlohy 52

- a) Skutečná výška schodu: $(147 : 490) \text{ m} = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$
Výška schodu po úpravě: $(147 : 500) \text{ m} = 0,294 \text{ m} = 29,4 \text{ cm}$
Výška schodu by se zmenšila o $0,6 \text{ cm}$.

- b) Skutečná výška schodu: $(x : y)$ metrů
Výška schodu po úpravě: $[x : (y + z)]$ metrů

$$\frac{x}{y} - \frac{x}{y+z} = \frac{xz}{y(y+z)}$$

Výška schodu by se zmenšila o $\frac{xz}{y(y+z)}$ metrů.

Pro hledaný počet procent p platí

$$\frac{p}{100} = \frac{\frac{x}{y+z}}{\frac{x}{y}}, \quad \text{odkud} \quad p = \frac{100y}{y+z}.$$

Řešení úlohy 53

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{3y}{y-3}\right) \cdot \left(\frac{3y}{y+3} - 3\right) &: \frac{9y^2}{y^2-9} = \\ &= \frac{y^2-3y+3y}{y-3} \cdot \frac{3y-3y-9}{y+3} \cdot \frac{(y-3)(y+3)}{9y^2} = \frac{-9y^2}{9y^2} = -1 \end{aligned}$$

Daný výraz je tedy roven -1 pro všechna $y \in \mathbb{R}$, pro která má smysl, tedy pro $y \neq 0, y \neq -3, y \neq 3$. Proto $M = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

Řešení úlohy 54

- a) $n + (n+1) + (n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$

Uvažovaný součet je dělitelný třemi.

- b) $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n+10 = 5(n+2)$

Uvažovaný součet je dělitelný pěti.

- c) $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n+6 = 4(n+1) + 2$

Uvažovaný součet dává při dělení čtyřmi pro každé $n \in \mathbb{N}$ zbytek 2, proto není pro žádné $n \in \mathbb{N}$ dělitelný čtyřmi.

Řešení úlohy 55

$$\begin{aligned} V(x) &= \left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+2} \right] \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} = \\ &= \frac{x+1-2(x+2)+(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} = \\ &= \frac{x+1-2x-4+x^2+2x+1}{(x+1)^2(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-2} = \\ &= \frac{x^2+x-2}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2} \end{aligned}$$

Podmínky: $x \notin \{-2, -1, 2\}$

Řešení úlohy 56

- a) V 56 litrech 96procentního roztoku je $(56 \cdot 0,96)$ litrů rozpouštěné látky a $(56 \cdot 0,04)$ litrů rozpouštědla.

Přidáme-li x litrů rozpouštědla, dostaneme $(56+x)$ litrů roztoku, v němž bude množství rozpouštěné látky stejné. Aby to byl roztok 84procentní, musí platit

$$(56+x) \cdot 0,84 = 56 \cdot 0,96, \quad \text{odkud} \quad x = 56 \cdot \frac{96}{84} - 56 = 8.$$

Je třeba přidat 8 litrů rozpouštědla.

- b) Analogicky jako v a) musí pro přidané množství x litrů rozpouštědla platit

$$(a+x) \cdot q = a \cdot p, \quad \text{odkud} \quad x = a \cdot \frac{p}{q} - a = a \cdot \frac{p-q}{q}.$$

Řešení úlohy 57

- a) Z rovnosti $V(a) : (a^4 + 3a^2 - 10) = a^2 + 5$ plyne:

$$V(a) = (a^4 + 3a^2 - 10)(a^2 + 5) = a^6 + 8a^4 + 5a^2 - 50$$

Aby bylo možné dělit, musí být

$$a^4 + 3a^2 - 10 \neq 0, \quad \text{tj.} \quad (a^2 + 5)(a^2 - 2) \neq 0,$$

odkud $a \neq \sqrt{2}$, $a \neq -\sqrt{2}$.

- b) Z rovnosti $W(a) \cdot (a^4 + 3a^2 - 10) = a^7 + 3a^5 + 3a^4 - 10a^3 + 9a^2 - 30$ plyne

$$W(a) = \frac{a^7 + 3a^5 + 3a^4 - 10a^3 + 9a^2 - 30}{a^4 + 3a^2 - 10} = a^3 + 3$$

(konečný výsledek jsme získali vydělením mnohočlenů).

Násobit je možné pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Řešení úlohy 58

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left(\frac{x^2}{y} + \frac{x^2y + xy^2}{xy} + \frac{x^3}{y^2} \right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right) = \\
 & = \frac{x^3y + x^2y^2 + xy^3 + x^4}{xy^2} : \frac{x^4 - y^4}{x^2y^2} = \\
 & = \frac{x(x^2y + xy^2 + y^3 + x^3)}{xy^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^4 - y^4} = \\
 & = \frac{x^2 [x^2(x+y) + y^2(x+y)]}{x^4 - y^4} = \\
 & = \frac{(x+y)(x^2+y^2)x^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2}{x-y}
 \end{aligned}$$

Podmínky: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$

- b) Dosazením $x = 2$, $y = 1$ do daného i upraveného výrazu dostaneme po úpravě stejnou hodnotu 4.

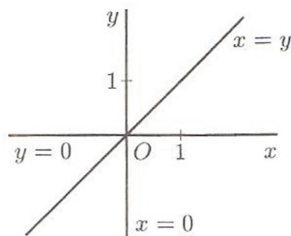
Řešení úlohy 59

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (x-y)^3 - x^3 + y^3 = (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - x^3 + y^3 = \\
 & = -3x^2y + 3xy^2 = 3xy(y-x)
 \end{aligned}$$

- b) Daný výraz je roven nule právě tehdy, když

$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad y = 0 \quad \text{nebo} \quad x = y.$$

- c) Hledaná množina je sjednocením tří přímek:

**Řešení úlohy 60**

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & V = [(x-2)(x+1)(2x+3)] \text{ m}^3 = (2x^3 + x^2 - 7x - 6) \text{ m}^3 \\
 & S = 2 \cdot [(x-2)(x+1) + (x-2)(2x+3) + (x+1)(2x+3)] \text{ m}^2 = \\
 & = (10x^2 + 6x - 10) \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

- b) Rozměry kváдру pro $x = 4,5$ jsou 2,5 m, 5,5 m, 12 m.

Objem kváдру v tomto případě je 165 m^3 , jeho povrch je $219,5 \text{ m}^2$.

- c) Pravidelný čtyřboký hranol má podstavu tvaru čtverce. Touto podstavou může být kterákoliv stěna kváдру. Proto nás zajímají kořeny rovnic

$$x - 2 = x + 1, \quad x - 2 = 2x + 3, \quad x + 1 = 2x + 3.$$

Protože žádná z těchto rovnic nemá v intervalu $(2, \infty)$ řešení, není uvažovaný kvádr pravidelným čtyřbokým hranolem pro žádné x .

3 Rovnice a nerovnice

Řešení úlohy 96

Dané číslo je složeno z x stovek, 1 desítky a y jednotek. Podle zadání platí:

$$100x + 10 + y = 64(x + y + 1),$$

$$100x + 10 + y = (100y + 10 + x) + 297,$$

neboli

$$36x - 63y = 54,$$

$$x - y = 3.$$

Tato soustava má jediné řešení $x = 5$, $y = 2$. Hledané číslo je 512.

Řešení úlohy 97

- a) Označíme-li rychlost druhého auta x km/h, potom

$$\frac{0,5}{x - 55} = \frac{1}{60},$$

odkud $x = 85$. Rychlost druhého auta byla 85 km/h.

- b) První auto ujelo za 6 minut 5,5 km. Druhý automobil ujel tuto vzdálenost za $\frac{5,5}{85} \text{ h} \doteq 3,9 \text{ min}$. Druhé auto již stálo přibližně 2,1 minuty.

Řešení úlohy 98

Označme x potřebný počet litrů smetany a y potřebný počet litrů mléka. Řešme soustavu rovnic:

$$x + y = 80$$

$$\frac{38}{100}x + \frac{4,25}{100}y = \frac{33}{100}(x + y)$$

$$y = 80 - x$$

$$38x + \frac{17}{4}(80 - x) = 2640$$

$$y = 80 - x$$

$$135x = 9200$$

$$x = \frac{1840}{27} \doteq 68,15 \quad \wedge \quad y \doteq 11,85$$

Potřebujeme přibližně 68,15 litru smetany a 11,85 litru mléka.

Řešení úlohy 99

- a) Předpokládejme, že se délka strany záhonu zvětší o x metrů, $x > 0$.
V $\mathbb{R}^+$ řešíme nerovnici:

$$(6 + x)^2 \leq 1,21 \cdot 36$$

Postupně dostaneme:

$$6 + x \leq 1,1 \cdot 6$$

$$x \leq 0,6$$

Protože 0,6 je 10 % z 6, můžeme stranu záhonu prodloužit nejvýše o 10 %.

- b) Obsah pěšin bude

$$(2 \cdot 0,3 \cdot 6 - 0,3^2) \text{ m}^2 = 3,51 \text{ m}^2,$$

a to je $\left(\frac{3,51}{36} \cdot 100\right) \% = 9,75 \%$ původní rozlohy záhonu.

Řešení úlohy 100

- a) Je-li délka bazénu x metrů ($x > 0$), je jeho šířka $0,6x$ metrů. Pro obsah dna platí

$$x \cdot 0,6x = 375,$$

odkud $x = 25$. Rozměry dna bazénu jsou 25 m a 15 m.

- b) Voda sahá do výšky $(1,5 - 0,15)$ m, v bazénu proto je

$$25 \cdot 15 \cdot (1,5 - 0,15) \text{ m}^3 = 506,25 \text{ m}^3 = 506\,250 \text{ litrů}$$

vody.

Řešení úlohy 101

Označme x , y , z postupně doby, které strávili v posilovně první, druhý a třetí muž. Platí

$$x + y + z = 440,$$

$$\frac{40}{100} x = \frac{50}{100} y,$$

$$x = y + z.$$

Dosazením $x = y + z$ do první a druhé rovnice této soustavy získáme soustavu

$$2(y + z) = 440,$$

$$4(y + z) = 5y,$$

z níž vypočteme $y = 176$, $z = 44$; $x = y + z = 220$.

První muž strávil v posilovně 220 hodin, druhý 176 hodin a třetí 44 hodin.

Řešení úlohy 102

- a) $x + 8 \neq 0$; daný výraz je definován právě pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

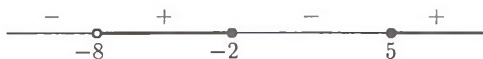
- b) $(x - 5)(x + 2) = 0$; daný výraz má hodnotu nula pouze pro $x = 5$
a $x = -2$.

$$\text{c) } \frac{(-0,5 - 5) \cdot (-0,5 + 2)}{-0,5 + 8} = \frac{-5,5 \cdot 1,5}{7,5} = \frac{-5,5}{5} = -1,1$$

d) Řešíme nerovnici:

$$\frac{(x-5)(x+2)}{x+8} \geq 0$$

Dělicí body -8 , -2 , 5 rozdělí množinu $\mathbb{R}$ na čtyři intervaly. Znaménka hodnot daného výrazu v těchto intervalech můžeme schematicky znázornit takto:



Hodnota daného výrazu je nezáporná právě pro $x \in (-8, -2) \cup \langle 5, \infty)$.

Řešení úlohy 103

$$\frac{7}{x+5} \geq 1 \iff \frac{7}{x+5} - 1 \geq 0 \iff \frac{2-x}{x+5} \geq 0 \iff x \in (-5, 2\rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{15}{7-x} < 2 &\iff \frac{15}{7-x} - 2 < 0 \iff \frac{2x+1}{7-x} < 0 \iff \\ &\iff x \in (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (7, \infty) \end{aligned}$$

Množina všech řešení dané soustavy nerovnic je:

$$(-5, 2\rangle \cap \left[(-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (7, \infty)\right] = (-5, -\tfrac{1}{2})$$

Řešení úlohy 104

Je-li a cm délka kratší odvěsny, má delší odvěsna délku $(a + 2\sqrt{2})$ cm. Podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 + (a + 2\sqrt{2})^2 = 6^2.$$

Odtud postupně vypočteme:

$$2a^2 + 4\sqrt{2}a - 28 = 0$$

$$a^2 + 2\sqrt{2}a - 14 = 0$$

$$a_1 = 4 - \sqrt{2}, \quad a_2 = -4 - \sqrt{2}$$

Jelikož $a_2 < 0$, má kratší odvěsna délku $(4 - \sqrt{2})$ cm a delší odvěsna délku $(4 + \sqrt{2})$ cm.

Obsah uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku je

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot (4 + \sqrt{2}) \text{ cm} \cdot (4 - \sqrt{2}) \text{ cm} = \tfrac{1}{2} \cdot [4^2 - (\sqrt{2})^2] \text{ cm}^2 = 7 \text{ cm}^2.$$

Řešení úlohy 105

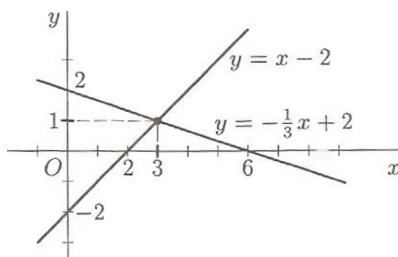
a)

$$\begin{array}{r}
 x - y = 2 \\
 x + 3y - 6 = 0 \\
 \hline
 -x + y = -2 \\
 x + 3y = 6 \\
 \hline
 -x + y = -2 \\
 4y = 4 \\
 \hline
 y = 1 \\
 x = 3
 \end{array}$$

Řešením dané soustavy je dvojice $x = 3$, $y = 1$.

- b) Průsečík P_1 s osou x : $y = 0$, $x - 0 = 2$, odkud $x = 2$, tedy $P_1[2, 0]$.
 Průsečík P_2 s osou y : $x = 0$, $0 - y = 2$, odkud $y = -2$, tedy $P_2[0, -2]$.

c)



- d) Dosazením souřadnic bodu $M[12, -2]$ do rovnice dané přímky dostaneme:

$$\begin{aligned}
 12 + 3 \cdot (-2) - 6 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Bod M na dané přímce leží.

Řešení úlohy 106

Označme x počet lisů, které byly v provozu instalovány. Jeden lis při plném výkonu zpracuje za den $\frac{96}{x}$ polotovarů. Podle zadání platí

$$\frac{96}{x} - 8 = \frac{96}{x + 2}$$

Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
 96(x + 2) - 8x(x + 2) &= 96x \\
 x^2 + 2x - 24 &= 0 \\
 (x + 6)(x - 4) &= 0
 \end{aligned}$$

Úloze vyhovuje pouze kořen $x = 4$. Na dílně byly tedy instalovány 4 lisy. Jeden lis zpracuje při plném výkonu za den $\frac{96}{4}$ polotovaru, tj. 24 polotovary, za 30 pracovních dnů zpracuje $(30 \cdot 24)$ polotovary, čili 720 polotovarů. Na zpracování 9 360 polotovarů by bylo třeba $\frac{9\,360}{720}$ lisu, tzn. 13 lisů.

Řešení úlohy 107

Ekvivalentními úpravami pro $x \neq \frac{2}{3}$ postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & \frac{\frac{4x}{3} - \frac{2}{3}}{2 - 3x} - \frac{\frac{5x}{3} - \frac{4}{3}}{x - \frac{2}{3}} = -2 \\ & \frac{4x - 2}{3(2 - 3x)} + \frac{5x - 4}{2 - 3x} = -2 \\ & \frac{19x - 14}{3(2 - 3x)} = -2 \\ & 19x - 14 = -12 + 18x \\ & x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad & \frac{\frac{4x}{3} - \frac{2}{3}}{2 - 3x} - \frac{\frac{5x}{3} - \frac{4}{3}}{x - \frac{2}{3}} \leq -2 \\ & \frac{19x - 14}{3(2 - 3x)} \leq -2 \\ & \frac{19x - 14 + 12 - 18x}{3(2 - 3x)} \leq 0 \\ & \frac{x - 2}{3(2 - 3x)} \leq 0 \\ & \frac{x - 2}{3x - 2} \geq 0 \\ & x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \langle 2, \infty \rangle \end{aligned}$$

Řešení úlohy 108

Klasická obrazovka o úhlopříčce 70 cm:

Označíme-li d cm čtvrtinu její šířky, potom její šířka $s_k = (4d)$ cm a výška $v_k = (3d)$ cm. Platí:

$$(3d)^2 + (4d)^2 = 70^2$$

$$d^2 = \frac{70^2}{25}$$

$$d = 14$$

$$v_k = (3d) \text{ cm} = (3 \cdot 14) \text{ cm} = 42 \text{ cm}$$

Moderní obrazovka o úhlopříčce 82 cm:

Označíme-li j cm šestnáctinu její šířky, potom její šířka $s_m = (16j)$ cm a výška $v_m = (9j)$ cm. Platí:

$$(16j)^2 + (9j)^2 = 82^2$$

$$j^2 = \frac{82^2}{337}$$

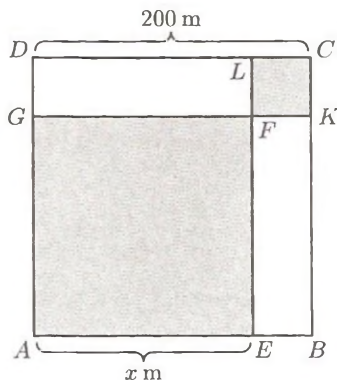
$$j \doteq 4,467$$

$$v_m = (9j) \text{ cm} \doteq (9 \cdot 4,467) \text{ cm} \doteq 40,2 \text{ cm}$$

Vyšší je klasická obrazovka o úhlopříčce 70 cm.

Řešení úlohy 109

Provedme označení bodů podle obrázku, délku strany čtverce $AEFG$ označme x metrů. Potom délka strany čtverce $FKCL$ je $(200 - x)$ m a $EBKF$, $FLDG$ jsou shodné obdélníky s délkami stran x m a $(200 - x)$ m.



Součet obsahů podbarvených pozemků: $[x^2 + (200 - x)^2] \text{ m}^2$

Součet obsahů nepodbarvených pozemků: $[2x(200 - x)] \text{ m}^2$

Podle zadání platí

$$x^2 + (200 - x)^2 = 2 \cdot 2x(200 - x).$$

Postupnými úpravami dostaneme:

$$x^2 + 40\,000 - 400x + x^2 = 800x - 4x^2$$

$$6x^2 - 1\,200x + 40\,000 = 0$$

$$3x^2 - 600x + 20\,000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{600 \pm \sqrt{120\,000}}{6} = \frac{600 \pm 200\sqrt{3}}{6} = 100 \pm \frac{100}{3}\sqrt{3}$$

$$x_1 \doteq 157,7, \quad x_2 \doteq 42,3$$

Délky stran čtvercových dílčích pozemků jsou přibližně 157,7 m a 42,3 m.

Řešení úlohy 110

- a) Do vzorce pro povrch rotačního válce dosadíme číselnou hodnotu povrchu v cm^2 a výšky v cm:

$$6\,280 = 2 \cdot 3,14 \cdot r(r + 30)$$

(r zde znamená číselnou hodnotu poloměru podstavy v cm).

Jednoduchou úpravou dostaneme:

$$r^2 + 30r - 1\,000 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 4\,000}}{2} = \begin{cases} 20 \\ -50 \end{cases}$$

Vyhovuje pouze kořen $r_1 = 20$.

Průměr podstavy daného válce je $(2 \cdot 20)$ cm, tj. 40 cm.

- b) Počítáme podobně jako v a), příslušné číselné hodnoty jsou tentokrát v dm a dm^2 :

$$2,5 \cdot 10^4 = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10 \cdot (5 \cdot 10 + v)$$

$$2,5 \cdot 10^2 = 3,14 \cdot (50 + v)$$

$$v \doteq 29,6$$

Výška daného válce je přibližně 29,6 dm.

Řešení úlohy 111

Ze vztahů mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty dané kvadratické rovnice plyne $p = -(x_1 + x_2)$ a $6 = x_1x_2$; navíc $x_1 = 3x_2$, tudíž $p = -4x_2$ a $6 = 3x_2^2$. Odtud vypočteme $p^2 = 16x_2^2 = 16 \cdot 2 = 32$.

Ciferný součet čísla 32 je 5.

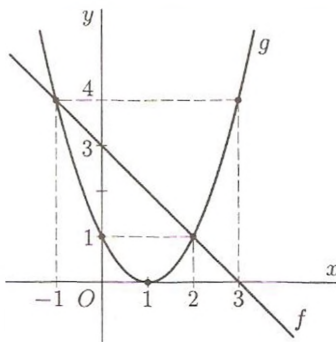
Řešení úlohy 112

a)

$$\begin{aligned}x - (2x - 3) &= (x - 1)^2 \\x - 2x + 3 &= x^2 - 2x + 1 \\0 &= x^2 - x - 2 \\x_1 &= -1, \quad x_2 = 2\end{aligned}$$

Jediným kořenem dané rovnice v oboru přirozených čísel je číslo 2.

b)



c) Početně:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &\geq x - (2x - 3) \\x^2 - x - 2 &\geq 0 \\(x + 1)(x - 2) &\geq 0 \\x &\in (-\infty, -1) \cup \langle 2, \infty)\end{aligned}$$

Stejný výsledek vyčteme z obrázku.

Řešení úlohy 113

Délky hran krychlí jsou x cm a $(x - 2)$ cm. Z rovnice

$$x^3 = (x - 2)^3 + 14$$

dostaneme po úpravě

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $1 - \sqrt{2}$ a $1 + \sqrt{2}$. Protože $1 - \sqrt{2} < 0$, je $x = 1 + \sqrt{2}$.

Číselná hodnota rozdílu povrchů obou krychlí (v cm^2) je:

$$\begin{aligned}6x^2 - 6(x - 2)^2 &= 6(1 + \sqrt{2})^2 - 6(\sqrt{2} - 1)^2 = \\&= 6(3 + 2\sqrt{2}) - 6(3 - 2\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}\end{aligned}$$

Rozdíl povrchů obou krychlí je $(24 \cdot \sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

4 Funkce

Řešení úlohy 141

- a) Funkce f je lineární, je tedy dána předpisem $f: y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Protože body K, L leží na jejím grafu, platí

$$2 = 3a + b \quad \text{a zároveň} \quad 4 = -a + b,$$

odkud $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{2}$.

Funkce f je dána předpisem $f: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

- b) Jelikož $f(6) = -\frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$, leží bod M na grafu funkce f .
c) Protože $f(0) = \frac{7}{2}$, je průsečíkem grafu funkce f s osou y bod $[0, \frac{7}{2}]$.
Protože $-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2} = 0$ pro $x = 7$, je průsečíkem grafu funkce f s osou x bod $[7, 0]$.
d) Vyřešením nerovnice $-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} > 2$ zjistíme, že funkce f má hodnoty větší než 2 právě pro všechna $x < 3$.

Řešení úlohy 142

Úpravou rovnice přímky p zjistíme, že tato přímka je grafem funkce

$$y = -\frac{1}{11} \cdot \frac{2-a}{5} \cdot x - \frac{1}{11} \cdot \frac{3-b}{2}.$$

Porovnáním koeficientů s koeficienty v předpisu zadávající funkci f získáme rovnice

$$-\frac{1}{11} \cdot \frac{2-a}{5} = \frac{3}{4},$$

$$-\frac{1}{11} \cdot \frac{3-b}{2} = \frac{3}{2},$$

odkud $a = \frac{173}{4}$, $b = 36$.

Řešení úlohy 143

- a) Označme l cm délku pružiny a m kg hmotnost zavěšeného závaží. Protože závislost délky pružiny na hmotnosti závaží je lineární, platí

$$l = am + l_0,$$

kde a je reálné číslo a l_0 cm je délka nezatížené pružiny. Ze zadání víme, že platí

$$13 = 2a + l_0,$$

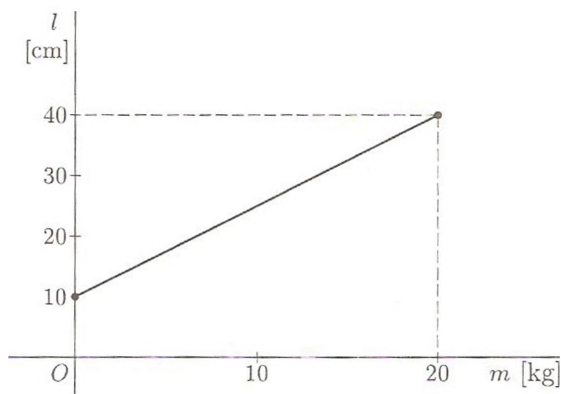
$$25 = 10a + l_0,$$

odkud $a = \frac{3}{2}$, $l_0 = 10$. Hledaný funkční předpis je

$$l = \frac{3}{2}m + 10, \quad m \in \langle 0, 20 \rangle.$$

b) Nezatížená pružina má délku 10 cm.

c) Graf:



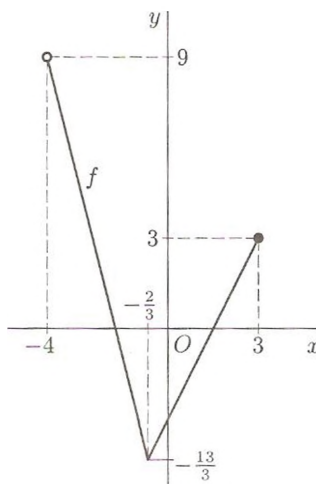
Řešení úlohy 144

a) Interval $(-4, 3)$ rozdělíme na dvě části a v každé z nich odstraníme absolutní hodnotu.

$$x \in (-4, -\frac{2}{3}): \quad y = (-3x - 2) - x - 5 = -4x - 7$$

$$x \in (-\frac{2}{3}, 3): \quad y = 3x + 2 - x - 5 = 2x - 3$$

Graf funkce f je složen z částí přímk:



b) Z grafu vyčteme, že oborem hodnot funkce f je interval $(-\frac{13}{3}, 9)$.

- b) Pro $a = 1$, $x_1 = 0,3$ je $V_1 = 0,048$.
 Pro $a = 1$, $x_2 = 0,2$ je $V_2 = 0,072$.
 Objem krabice se zvětší o $0,024 \text{ m}^3$.

Řešení úlohy 148

Jestliže délky dvou protějších oplocených stran pozemku jsou x metrů ($0 < x < 40$), pak strana „proti zdi“ měří $(80 - 2x)$ metrů.

Obsah pozemku označme $S \text{ m}^2$. Platí

$$S = x(80 - 2x).$$

Maximální hodnotu obsahu zjistíme například doplněním na druhou mocninu lineárního dvojčlenu:

$$S = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2 = -2(x - 20)^2 + 800.$$

Vidíme, že obsah je maximální pro $x = 20$.

Rozměry pozemku o maximální možné výměře jsou 20 m a 40 m.

Řešení úlohy 149

- a) Platí

$$\sqrt{3} - 1 = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + b, \quad -1 = a \cdot 0 + b,$$

odkud $b = -1$ a $a = 2$.

- b) Rovnici $2 \sin x - 1 = 0$ upravíme na tvar $\sin x = \frac{1}{2}$. V intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ má tato rovnice právě dvě řešení $x_1 = \frac{1}{6}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Hledané průsečíky grafu funkce f s osou x jsou body $[\frac{1}{6}\pi, 0]$ a $[\frac{5}{6}\pi, 0]$.

Řešení úlohy 150

- a) Označme původní objem hranolu $V_1 \text{ m}^3$. Platí:

$$V_1 = x^2(x + 2) = x^3 + 2x^2$$

Objem hranolu s prodlouženými hranami označme $V_2 \text{ m}^3$. Platí:

$$V_2 = (x + 0,5)^2(x + 2,5) = x^3 + 3,5x^2 + 2,75x + 0,625$$

Přírůstek

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 1,5x^2 + 2,75x + 0,625$$

je skutečně kvadratická funkce proměnné x .

- b) Označme původní povrch hranolu $S_1 \text{ m}^2$. Platí:

$$S_1 = 2x^2 + 4x(x + 2) = 6x^2 + 8x$$

Povrch hranolu s prodlouženými hranami označme $S_2 \text{ m}^2$. Platí:

$$S_2 = 2(x + 0,5)^2 + 4(x + 0,5)(x + 2,5) = 6x^2 + 14x + 5,5$$

Přírůstek

$$\Delta S = S_2 - S_1 = 6x + 5,5$$

je skutečně lineární funkce proměnné x .

Řešení úlohy 151

- a) Předpis pro funkci f hledíme ve tvaru

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Aby na grafu funkce f ležely body $[0, -5]$, $[-1, 0]$, $[5, 0]$, musí platit:

$$-5 = c, \quad 0 = a - b + c, \quad 0 = 25a + 5b + c.$$

Odtud vypočteme $c = -5$, $a = 1$, $b = -4$.

Funkce f je tedy dána předpisem

$$y = x^2 - 4x - 5, \quad \text{tj.} \quad y = (x - 2)^2 - 9.$$

- b) Grafem funkce f je parabola s vrcholem $V[2, -9]$ rozevírající se směrem nahoru. Předpis pro funkci g snadno napíšeme, uvědomíme-li si, která parabola je jejím grafem.

$$\alpha) \quad g: y = -(x - 2)^2 + 9 = -x^2 + 4x + 5$$

$$\beta) \quad g: y = (x + 2)^2 - 9 = x^2 + 4x - 5$$

$$\gamma) \quad g: y = -(x + 2)^2 + 9 = -x^2 - 4x + 5$$

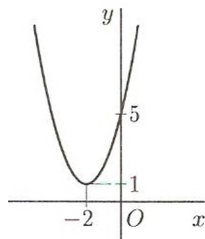
Řešení úlohy 152

- a) $y = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$

Vrchol: $[-2, 1]$.

Průsečík s osou x neexistuje.

Průsečík s osou y : $[0, 5]$.

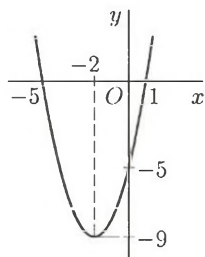


- b) $y = x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9 = (x + 5)(x - 1)$

Vrchol: $[-2, -9]$.

Průsečíky s osou x : $[-5, 0]$, $[1, 0]$.

Průsečík s osou y : $[0, -5]$.

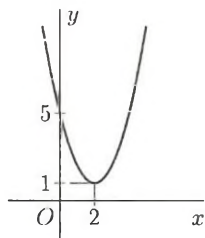


- c) $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$

Vrchol: $[2, 1]$.

Průsečík s osou x neexistuje.

Průsečík s osou y : $[0, 5]$.

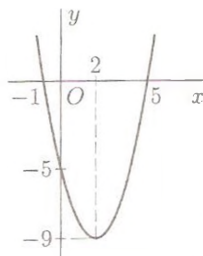


$$d) y = x^2 - 4x - 5 = (x - 2)^2 - 9 = (x - 5)(x + 1)$$

Vrchol: $[2, -9]$.

Průsečíky s osou x : $[-1, 0]$, $[5, 0]$.

Průsečík s osou y : $[0, -5]$.



Řešení úlohy 153

Z první rovnice vidíme, že $x = -3$, nebo $x = 3$.

Tyto hodnoty neznámé x dosadíme do druhé rovnice a vypočteme příslušné hodnoty neznámé y .

Pro $x = -3$ dostaneme:

$$|y| - 2 = \sin \frac{3}{2}\pi$$

$$|y| - 2 = -1$$

$$|y| = 1$$

$$y = -1, \text{ nebo } y = 1$$

Pro $x = 3$ dostaneme:

$$|y| - 2 = \sin \frac{3}{2}\pi$$

$$y = -1, \text{ nebo } y = 1$$

Daná soustava rovnic má právě čtyři řešení. Jsou to tyto uspořádané dvojice (x, y) :

$$(-3, -1), (-3, 1), (3, -1), (3, 1)$$

5 Posloupnosti

Řešení úlohy 167

Jestliže do rovnosti $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ dosadíme $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, dostaneme:

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 0$$

$$a_1 + d = 0$$

Z rovnosti $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ s využitím vztahu $a_1 + d = 0$ vypočteme:

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 + [(a_1 + d) + d]^2 = 50$$

$$a_1^2 + d^2 = 50$$

$$a_1^2 + (-a_1)^2 = 50$$

$$a_1^2 = 25$$

Úloha má dvě řešení: $a_1 = 5$, $d = -5$ a $a_1 = -5$, $d = 5$.

Řešení úlohy 168

Hledaný kvocient označme q . Dosazením $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_1q^2$ do rovnosti $a_3 = 6a_1 - a_2$ dostaneme:

$$a_1q^2 = 6a_1 - a_1q$$

$$a_1(q^2 + q - 6) = 0$$

$$a_1(q - 2)(q + 3) = 0$$

Protože podle zadání $a_1 > 0$ a $q > 0$, plyne odtud $q = 2$.

Řešení úlohy 169

- a) Označme a počet mincí ve straně čtverce. Počet všech mincí v čtverci je a^2 . V „základně“ trojúhelníku je $(a + 2)$ mincí a protože v každé další řadě v trojúhelníku je o jednu minci méně než v předchozí řadě, je celkový počet mincí v trojúhelníku:

$$(a + 2) + (a + 1) + \dots + 1 = \frac{a + 2}{2} \cdot (a + 3)$$

Platí:

$$\frac{a + 2}{2} \cdot (a + 3) = a^2$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$a_1 = 6, \quad a_2 = -1$$

Počet mincí je kladné číslo, proto podmínkám úlohy vyhovuje pouze řešení $a_1 = 6$.

Petr má 36 mincí.

- b) V „základně“ trojúhelníku je 8 mincí, ve čtvrté řadě je 5 mincí, jejich celková hodnota je 25 Kč.
- c) Obsah plochy pokryté všemi 36 mincemi je

$$S = (36 \cdot \pi \cdot 1,4^2) \text{ cm}^2 \doteq (36 \cdot 3,14 \cdot 1,4^2) \text{ cm}^2 \doteq 222 \text{ cm}^2.$$

Řešení úlohy 170

- a) Označme číselné hodnoty (ve stupních) velikostí vnitřních úhlů daného n -úhelníku od nejmenší po největší postupně $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Protože to jsou po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a $\alpha_1 = 20$, $\alpha_n = 160$, platí:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{n}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_n) = \frac{n}{2} \cdot (20 + 160) = 90n$$

Součet velikostí vnitřních úhlů libovolného n -úhelníku je $(n - 2) \cdot 180^\circ$, proto:

$$90n = (n - 2) \cdot 180$$

$$n = 4$$

- b) Víme, že $\alpha_1 = 20$, $\alpha_4 = 160$. Označíme-li d diferenci příslušné aritmetické posloupnosti, můžeme psát:

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3d$$

$$160 = 20 + 3d$$

$$d = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}$$

- c) Velikosti vnitřních úhlů daného čtyřúhelníku jsou

$$20^\circ, \quad \left(20 + \frac{140}{3}\right)^\circ = 66\frac{2}{3}^\circ, \quad \left(20 + \frac{280}{3}\right)^\circ = 113\frac{1}{3}^\circ, \quad 160^\circ.$$

Řešení úlohy 171

- a) Označme d diferenci dané aritmetické posloupnosti. Podle zadání platí

$$\frac{5}{2}(a_1 + a_1 + 4d) = 50 \quad \text{a} \quad (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 32.$$

Po úpravě dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$2a_1 + 4d = 20,$$

$$2a_1 + 7d = 32,$$

odkud vypočteme $d = 4$, $a_1 = 2$.

Prvních pět členů dané posloupnosti je

$$2, 6, 10, 14, 18.$$

- b) Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 2$ a diferencí $d = 4$ je

$$\frac{n}{2} \cdot [2 + 2 + (n - 1) \cdot 4] = \frac{n}{2} \cdot (4 + 4n - 4) = 2n^2.$$

Aby platilo $2n^2 > 1000$, musí být $n \geq 23$.

Řešení úlohy 172

Označme q kvocient dané geometrické posloupnosti. Podle zadání platí

$$a_1 + a_1q = 240 \quad \text{a} \quad a_1q + a_1q^2 = 60.$$

Levé strany těchto rovností nejsou rovny nule, proto $1 + q \neq 0$, $q + q^2 \neq 0$, tedy $q \neq -1$, $q \neq 0$.

Z obou rovností vyjádříme neznámou a_1 :

$$a_1 = \frac{240}{1 + q}, \quad a_1 = \frac{60}{q + q^2}$$

Porovnáním pravých stran postupně dostaneme:

$$\frac{240}{1 + q} = \frac{60}{q + q^2}$$

$$240q = 60$$

$$q = \frac{1}{4}$$

Dále:

$$a_1 = \frac{240}{1+q} = \frac{240}{1+\frac{1}{4}} = 192$$

Čtvrtý člen dané posloupnosti je

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 192 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 3.$$

Řešení úlohy 173

Na začátku prvního roku vložil pan Spořivý na účet 8 000 Kč. Úrok za první rok činí $(8\,000 \cdot 0,042)$ Kč, daň z tohoto úroku je $(8\,000 \cdot 0,042 \cdot 0,15)$ Kč.

Banka tedy na konci prvního roku připočte k částce na účtu úrok po zdanění hodnotě

$$(8\,000 \cdot 0,042 - 8\,000 \cdot 0,042 \cdot 0,15) \text{ Kč} = (8\,000 \cdot 0,042 \cdot 0,85) \text{ Kč}$$

Stav účtu na konci prvního roku:

$$(8\,000 + 8\,000 \cdot 0,042 \cdot 0,85) \text{ Kč} = [8\,000 \cdot (1 + 0,042 \cdot 0,85)] \text{ Kč} = 8\,285,60 \text{ Kč}$$

Podobné to bude ve druhém a třetím roce. Nesmíme ovšem zapomenout na snížení roční úrokové míry na 4% a na skutečnost, že pan Spořivý na začátku každého roku uloží 8 000 Kč.

Stav účtu na konci druhého roku:

$$[(8\,285,60 + 8\,000) \cdot (1 + 0,04 \cdot 0,85)] \text{ Kč} \doteq 16\,839,31 \text{ Kč}$$

Stav účtu na konci třetího roku:

$$[(16\,839,31 + 8\,000) \cdot (1 + 0,04 \cdot 0,85)] \text{ Kč} \doteq 25\,683,85 \text{ Kč}$$

6 Planimetrie

Řešení úlohy 195

Čtverec $S_1S_2S_3S_4$ má stranu délky

$$|S_1S_2| = 4 \text{ cm}$$

a úhlopříčku délky

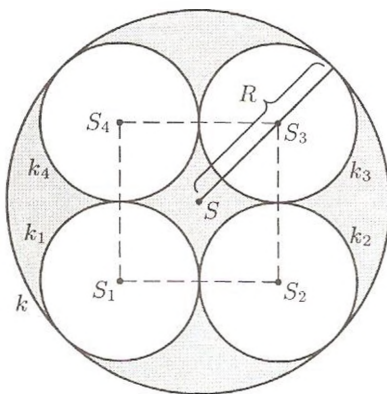
$$|S_1S_3| = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Pro poloměr R kružnice k platí

$$R = \left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} + 2\right) \text{ cm} = (2\sqrt{2} + 2) \text{ cm}.$$

Obsah podbarveného útvaru je

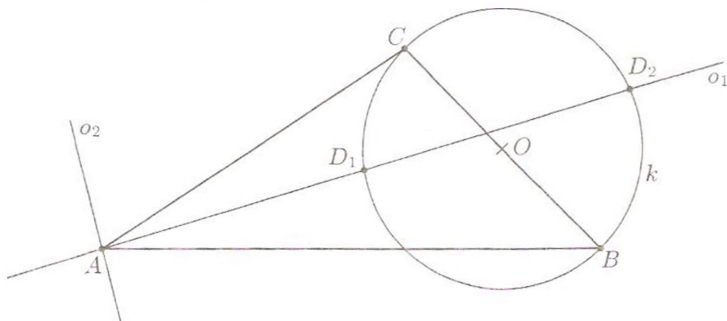
$$\left[\pi(2\sqrt{2} + 2)^2 - 4 \cdot \pi \cdot 2^2\right] \text{ cm}^2 = \left[4\pi(2\sqrt{2} - 1)\right] \text{ cm}^2 \doteq 23 \text{ cm}^2.$$



Řešení úlohy 196

Nejdříve sestrojíme trojúhelník ABC , pro který platí $|AB| = 6,6 \text{ cm}$, $|BC| = 3,7 \text{ cm}$, $|CA| = 4,8 \text{ cm}$.

Množinou všech bodů, které jsou stejně vzdáleny od přímek AC a AB , je množina všech bodů ležících na některé z os o_1 , o_2 úhlů určených těmito přímkami (viz obrázek).

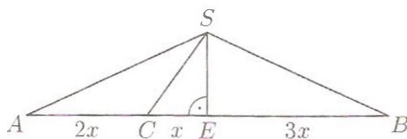


Množinou všech bodů, ze kterých je vidět úsečku BC pod úhlem 90° , je Thaletova kružnice k sestrojená nad průměrem BC bez bodů B , C , tj. množina $k(O; \frac{1}{2}|BC|) \setminus \{B, C\}$, kde O je střed úsečky BC .

V našem případě existují dva body D_1 , D_2 daných vlastností; jsou to průsečíky přímk o_1 a kružnice k .

Řešení úlohy 197

Označme S střed daných kružnic, E střed tětivy AB a x délku úsečky CE (viz obrázek).



Podle zadání platí $|AB| = 6x$ a $|AC| = 2x$.

Z pravoúhlých trojúhelníků AES a CES vyplývá

$$|SE|^2 = |AS|^2 - (3x)^2,$$

$$|SE|^2 = |CS|^2 - x^2.$$

Z rovnosti pravých stran po dosazení $|AS| = 33 \text{ cm}$ a $|CS| = 17 \text{ cm}$ vypočteme:

$$8x^2 = 800 \text{ cm}^2$$

$$x = 10 \text{ cm}$$

Délka tětivy AB je:

$$|AB| = 6x = 6 \cdot 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

Řešení úlohy 198

Označme a , c délky základů, $a < c$, b délku ramene, v výšku, S obsah a o obvod daného rovnoramenného lichoběžníku (viz obrázek).

Platí $v : a : c = 2 : 3 : 5$, odkud $v = \frac{2}{3}a$, $c = \frac{5}{3}a$.

Ze zadání víme, že $S = 2048 \text{ cm}^2$, tedy:

$$\frac{a+c}{2} \cdot v = 2048 \text{ cm}^2$$

$$\frac{a + \frac{5}{3}a}{2} \cdot \frac{2}{3}a = 2048 \text{ cm}^2$$

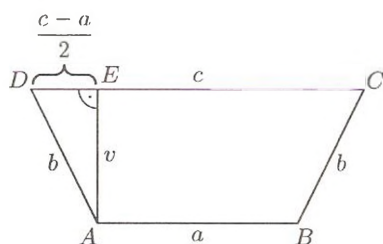
$$a^2 = 2304 \text{ cm}^2$$

$$a = 48 \text{ cm}$$

$$c = \frac{5}{3}a = 80 \text{ cm}, \quad v = \frac{2}{3}a = 32 \text{ cm}$$

Délku b ramene lichoběžníku vypočteme podle obrázku z pravoúhlého trojúhelníku AED :

$$b = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{16^2 + 32^2} \text{ cm} = 16\sqrt{5} \text{ cm}$$



Řešení úlohy 199

a) Z pravoúhlého trojúhelníku ABC podle Pythagorovy věty vyplývá:

$$(x-3)^2 + (x+4)^2 = [x + (x-5)]^2$$

$$x(x-11) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad x = 11$$

Protože $x > 3$, vyhovuje podmínkám úlohy pouze $x = 11$.

Z trojúhelníku AED vypočteme:

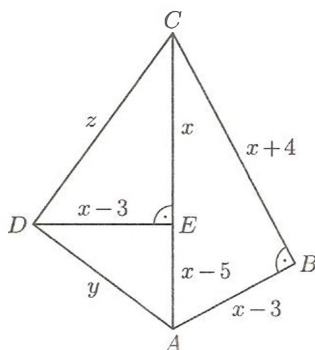
$$y^2 = 8^2 + 6^2$$

$$y = 10$$

Z trojúhelníku DEC vypočteme:

$$z^2 = 11^2 + 8^2$$

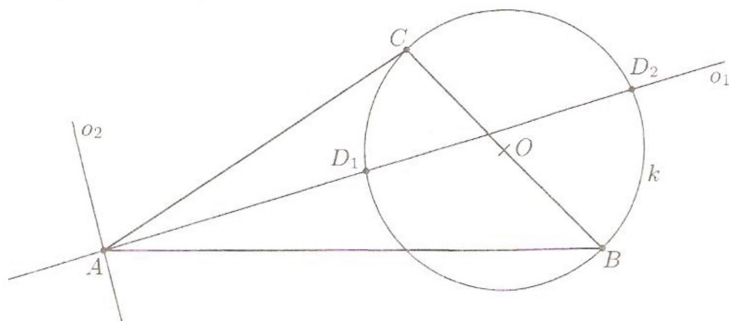
$$z = \sqrt{185}$$



Řešení úlohy 196

Nejdříve sestojíme trojúhelník ABC , pro který platí $|AB| = 6,6$ cm, $|BC| = 3,7$ cm, $|CA| = 4,8$ cm.

Množinou všech bodů, které jsou stejně vzdáleny od přímek AC a AB , je množina všech bodů ležících na některé z os o_1 , o_2 úhlů určených těmito přímkami (viz obrázek).

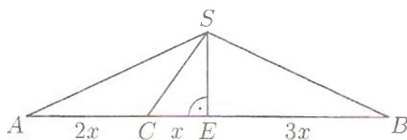


Množinou všech bodů, ze kterých je vidět úsečku BC pod úhlem 90° , je Thaletova kružnice k sestojená nad průměrem BC bez bodů B , C , tj. množina $k(O; \frac{1}{2}|BC|) \setminus \{B, C\}$, kde O je střed úsečky BC .

V našem případě existují dva body D_1 , D_2 daných vlastností; jsou to průsečíky přímk o_1 a kružnice k .

Řešení úlohy 197

Označme S střed daných kružnic, E střed tětiny AB a x délku úsečky CE (viz obrázek).



Podle zadání platí $|AB| = 6x$ a $|AC| = 2x$.

Z pravoúhlých trojúhelníků AES a CES vyplývá

$$|SE|^2 = |AS|^2 - (3x)^2,$$

$$|SE|^2 = |CS|^2 - x^2.$$

Z rovnosti pravých stran po dosazení $|AS| = 33$ cm a $|CS| = 17$ cm vypočteme:

$$8x^2 = 800 \text{ cm}^2$$

$$x = 10 \text{ cm}$$

Délka tětiny AB je:

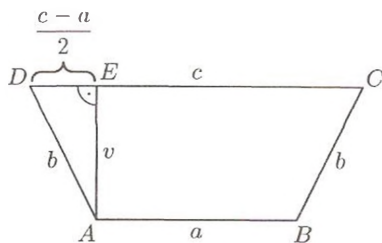
$$|AB| = 6x = 6 \cdot 10 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$$

Řešení úlohy 198

Označme a , c délky základů, $a < c$, b délku ramene, v výšku, S obsah a o obvod daného rovnoramenného lichoběžníku (viz obrázek).

Platí $v : a : c = 2 : 3 : 5$, odkud

$$v = \frac{2}{3}a, \quad c = \frac{5}{3}a.$$



Ze zadání víme, že $S = 2048 \text{ cm}^2$, tedy:

$$\frac{a+c}{2} \cdot v = 2048 \text{ cm}^2$$

$$\frac{a + \frac{5}{3}a}{2} \cdot \frac{2}{3}a = 2048 \text{ cm}^2$$

$$a^2 = 2304 \text{ cm}^2$$

$$a = 48 \text{ cm}$$

$$c = \frac{5}{3}a = 80 \text{ cm}, \quad v = \frac{2}{3}a = 32 \text{ cm}$$

Délku b ramene lichoběžníku vypočteme podle obrázku z pravoúhlého trojúhelníku AED :

$$b = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{16^2 + 32^2} \text{ cm} = 16\sqrt{5} \text{ cm}$$

Řešení úlohy 199

a) Z pravoúhlého trojúhelníku ABC podle Pythagorovy věty vyplývá:

$$(x-3)^2 + (x+4)^2 = [x + (x-5)]^2$$

$$x(x-11) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{nebo} \quad x = 11$$

Protože $x > 3$, vyhovuje podmínkám úlohy pouze $x = 11$.

Z trojúhelníku AED vypočteme:

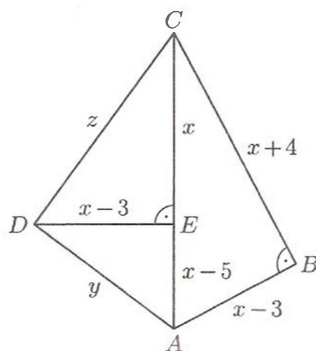
$$y^2 = 8^2 + 6^2$$

$$y = 10$$

Z trojúhelníku DEC vypočteme:

$$z^2 = 11^2 + 8^2$$

$$z = \sqrt{185}$$



b) Obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ je součtem obsahů tří trojúhelníků:

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AED} + S_{\triangle DEC}$$

$$S_{\triangle ABC} = \left[\frac{1}{2} (x - 3)(x + 4) \right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \right] \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$$

$$S_{\triangle AED} = \left[\frac{1}{2} (x - 5)(x - 3) \right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \right] \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$$

$$S_{\triangle DEC} = \left[\frac{1}{2} x(x - 3) \right] \text{ cm}^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \right] \text{ cm}^2 = 44 \text{ cm}^2$$

$$S = (60 + 24 + 44) \text{ cm}^2 = 128 \text{ cm}^2$$

Řešení úlohy 200

Označme a délku strany malého rovnostranného trojúhelníku. Výška tohoto trojúhelníku je $\frac{1}{2}\sqrt{3}a$ a jeho obsah je $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$. Proto platí:

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = 25\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

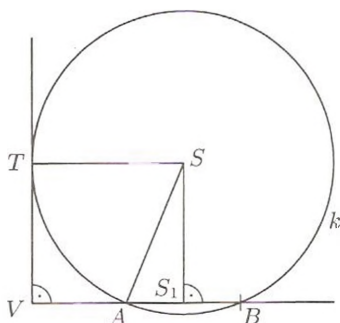
$$a^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

Obvod trojúhelníku ABC je

$$3 \cdot 2a = 6a = 60 \text{ cm}.$$

Řešení úlohy 201



Platí (viz obrázek)

$$|SA| = |ST| = |VS_1| = \frac{1}{2}(|VA| + |VB|) = \frac{1}{2}(a + b),$$

$$|AS_1| = \frac{1}{2}(|VB| - |VA|) = \frac{1}{2}(b - a),$$

$$|SS_1|^2 = |SA|^2 - |AS_1|^2.$$

Dosazením a výpočtem dostaneme:

$$|SS_1|^2 = \left[\frac{1}{2}(a + b) \right]^2 - \left[\frac{1}{2}(b - a) \right]^2$$

$$|SS_1| = \sqrt{ab}$$

Jelikož $|VT| = |SS_1|$, má úsečka VT délku $\sqrt{ab}$.

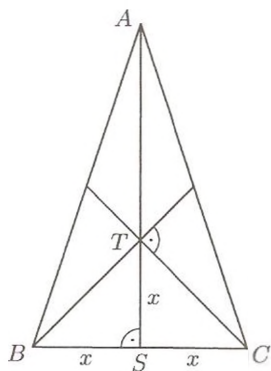
Řešení úlohy 202

Těžnice z vrcholů B a C jsou shodné, takže trojúhelník BCT z obrázku je pravoúhlý a rovnoramenný. Označíme-li $x = |TS|$, platí $|BS| = |CS| = x$, $|BC| = 2x$, $|AS| = 3x$. Z rovnosti

$$\frac{1}{2} \cdot (2x) \cdot (3x) = 30 \text{ cm}^2$$

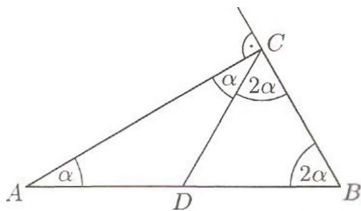
vypočteme $x = \sqrt{10} \text{ cm}$ a z pravoúhlého trojúhelníku ABS dostaneme:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|BS|^2 + |AS|^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + (3x)^2} = \sqrt{10}x = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$



Řešení úlohy 203

Označme D střed přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC (viz obrázek).



Bod C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB , proto $|AB| = 12 \text{ cm}$. Trojúhelníky ADC a BDC jsou rovnoramenné.

Nechť například $|\sphericalangle ACD| : |\sphericalangle BCD| = 1 : 2$.

Označíme-li $|\sphericalangle DAC| = \alpha$, je $|\sphericalangle ACD| = \alpha$, $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DBC| = 2\alpha$. Pro součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC platí

$$\alpha + (\alpha + 2\alpha) + 2\alpha = 180^\circ, \quad \text{odkud} \quad \alpha = 30^\circ.$$

Nyní již můžeme vypočítat délky odvěsen AC a BC :

$$|AC| = |AB| \cdot \cos \alpha = 12 \text{ cm} \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

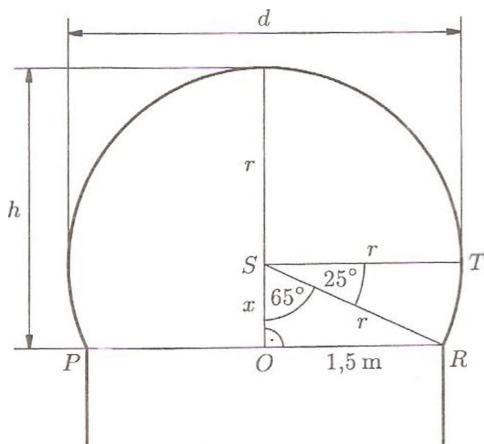
$$|BC| = |AB| \cdot \sin \alpha = 12 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ = 6 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku ABC je

$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Řešení úlohy 204

Označme r poloměr kružnice, jejíž částí je uvažovaný oblouk, a x vzdálenost bodu S od přímky PR (viz obrázek).



Platí

$$d = 2r, \quad h = r + x.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku SOR vyplývá

$$r = \frac{1,5 \text{ m}}{\sin 65^\circ}, \quad x = \frac{1,5 \text{ m}}{\tan 65^\circ},$$

odkud vypočteme

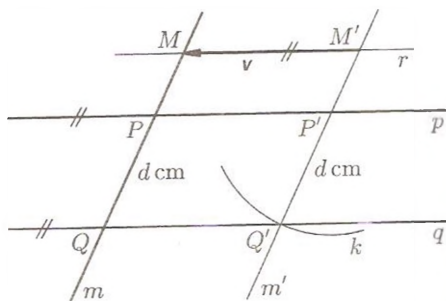
$$d = 2r = \frac{3 \text{ m}}{\sin 65^\circ} \doteq 3,31 \text{ m},$$

$$h = r + x = \frac{1,5 \text{ m}}{\sin 65^\circ} + \frac{1,5 \text{ m}}{\tan 65^\circ} \doteq 2,35 \text{ m}.$$

Řešení úlohy 205

Rozbor:

Jestliže m' je libovolná přímka, která protíná přímky p, q po řadě v bodech P', Q' takových, že $|P'Q'| = d \text{ cm}$, potom je přímka m obrazem přímky m' v posunutí určeném vektorem $\mathbf{v} = M - M'$; bod P je obrazem bodu P' a bod Q obrazem bodu Q' (viz obrázek).



Popis konstrukce:

1. bod P' ; $P' \in p$, P' je libovolný
2. kružnice k ; $k(P'; d \text{ cm})$
3. bod Q' ; $Q' \in k \cap q$
4. přímka r ; $M \in r \wedge r \parallel p$
5. bod M' ; $M' \in \leftrightarrow P'Q' \cap r$
6. přímka m ; m je obrazem přímky m'
v posunutí určeném vektorem $v = M - M'$
7. body P, Q ; $P \in p \cap m \wedge Q \in q \cap m$

Zkouška:

Úsečka PQ je obrazem úsečky $P'Q'$ v posunutí určeném vektorem v , proto $PQ \cong P'Q'$ a $|PQ| = |P'Q'| = d \text{ cm}$.

Diskuse:

Označme $v \text{ cm}$ vzdálenost rovnoběžek p, q .

Pokud $d > v$, protne kružnice k přímku q ve dvou bodech a úloha má dvě řešení.

Pokud $d = v$, je přímka q tečnou kružnice k a úloha má jedno řešení.

Pokud $d < v$, nemá úloha řešení.

7 Stereometrie

Řešení úlohy 227

Obsahy bočních obdélníkových stěn bazénu jsou

$$S_1 = (3 \cdot 15) \text{ m}^2 = 45 \text{ m}^2, \quad S_2 = (1,5 \cdot 15) \text{ m}^2 = 22,5 \text{ m}^2,$$

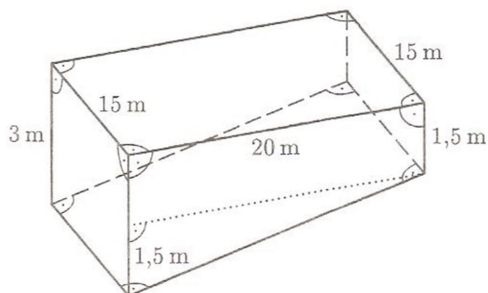
obsah každé boční lichoběžníkové stěny je

$$S_3 = \left[\frac{1}{2} (3 + 1,5) \cdot 20 \right] \text{ m}^2 = 45 \text{ m}^2$$

a obsah dna bazénu je

$$S_4 = (15 \cdot \sqrt{20^2 + 1,5^2}) \text{ m}^2 \doteq 300,84 \text{ m}^2$$

(viz obrázek).



Obsah celého vnitřku bazénu je

$$S = S_1 + S_2 + 2S_3 + S_4 \doteq 458,34 \text{ m}^2$$

a protože

$$458,34 \cdot (80 \text{ Kč}) = 36\,667,20 \text{ Kč} \doteq 36\,667 \text{ Kč},$$

stojí jeho natření 36 667 Kč.

Řešení úlohy 228

Rozměry krabice označme x dm, y dm, z dm, kde $x < y < z$. Platí

$$xy = 27,3, \quad xz = 33,6, \quad yz = 52.$$

Z první rovnice vyjádříme neznámou y , z druhé rovnice neznámou z ,

$$y = \frac{27,3}{x}, \quad z = \frac{33,6}{x},$$

příslušné výrazy dosadíme do třetí rovnice a vypočteme x :

$$\begin{aligned} \frac{27,3}{x} \cdot \frac{33,6}{x} &= 52 \\ x^2 &= \frac{27,3 \cdot 33,6}{52} \\ x &= 4,2 \end{aligned}$$

Nyní dopočítáme y a z :

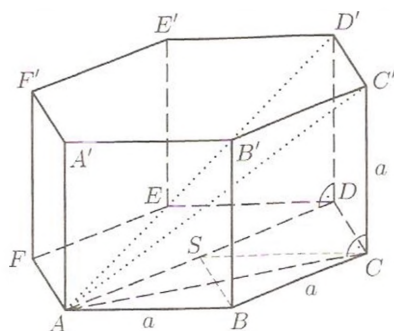
$$\begin{aligned} y &= \frac{27,3}{x} = \frac{27,3}{4,2} = 6,5 \\ z &= \frac{33,6}{x} = \frac{33,6}{4,2} = 8 \end{aligned}$$

Objem krabice je

$$(4,2 \cdot 6,5 \cdot 8) \text{ dm}^3 = 218,4 \text{ dm}^3.$$

Řešení úlohy 229

Daný hranol označme $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$ a střed jeho podstavy $ABCDEF$ označme S (viz obrázek).



- a) Délky úhlopříček pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ nabývají dvou hodnot, a to $|AC|$, $|AD|$. Těm odpovídají dvě hodnoty délek tělesových úhlopříček daného hranolu: $|AC'|$, $|AD'|$.
- b) Délka úsečky AC je dvojnásobkem výšky a délka úsečky AD dvojnásobkem délky strany rovnostranného trojúhelníku ABS , tedy:

$$|AC| = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a = a\sqrt{3}, \quad |AD| = 2a$$

Délky tělesových úhlopříček AC' , AD' vypočteme pomocí Pythagorovy věty:

$$|AC'| = \sqrt{|AC|^2 + |CC'|^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

$$|AD'| = \sqrt{|AD|^2 + |DD'|^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$

Řešení úlohy 230

- a) Objem kuželu s vrcholem S_1 :

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 x$$

Objem kuželu s vrcholem S_2 :

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 (v - x)$$

Součet objemů obou kuželů:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \frac{1}{3}\pi r^2 x + \frac{1}{3}\pi r^2 (v - x) = \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 v \end{aligned}$$

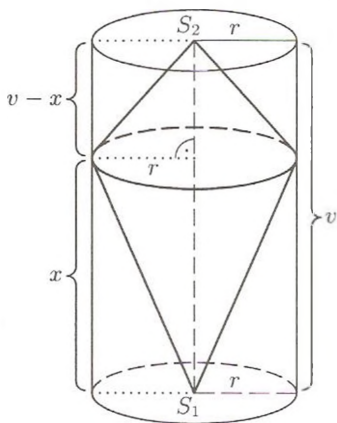
Součet objemů obou kuželů na vzdálenosti x nezávisí, je vzhledem k x konstantní.

- b) V části a) jsme zjistili, že součet objemů obou kuželů nabývá maximální hodnoty $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ pro všechny vzdálenosti x mezi 0 cm a v .

- c) Objem válce:

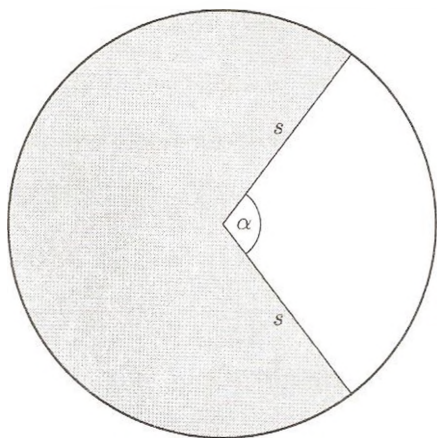
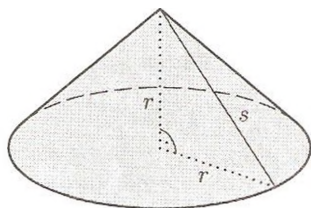
$$V = \pi r^2 v$$

Součet objemů obou kuželů je pro každou vzdálenost x jednou třetinou objemu válce, tvoří tedy 33,3% objemu válce.



Řešení úlohy 231

Klobouk má tvar pláště kuželu zobrazeného na obrázku vlevo. Poloměr podstavy a výšku tohoto kuželu označme r . Obvod jeho podstavy je $2\pi r$. Z obrázku je vidět, že délka strany kuželu je $s = r\sqrt{2}$.



Na zhotovení klobouku proto potřebujeme kruh papíru s poloměrem $s = r\sqrt{2}$ (obrázek vpravo). Z něj použijeme kruhovou výseč ohraničenou dvěma poloměry a obloukem kružnice o délce $2\pi r$. Protože středový úhel této výseče má velikost $360^\circ - \alpha$ a obvod celého kruhu papíru je $2\pi r\sqrt{2}$, musí platit:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi r\sqrt{2}}{360^\circ} \cdot (360^\circ - \alpha) &= 2\pi r \\ \alpha &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \cdot 360^\circ \\ \alpha &\doteq 105^\circ\end{aligned}$$

Řešení úlohy 232

Označme r_1 poloměr podstavy a v_1 výšku válce C_1 . Protože $v_1 = 2r_1$, má válec C_1 povrch

$$S_1 = 2\pi r_1(r_1 + v_1) = 2\pi r_1(r_1 + 2r_1) = 6\pi r_1^2.$$

Dále označme r_2 poloměr podstavy a v_2 výšku válce C_2 . Protože $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ a $v_2 = 2v_1 = 4r_1$, má válec C_2 povrch

$$S_2 = 2\pi r_2(r_2 + v_2) = 2\pi \frac{1}{2}r_1\left(\frac{1}{2}r_1 + 4r_1\right) = \frac{9}{2}\pi r_1^2.$$

Tedy

$$S_1 : S_2 = (6\pi r_1^2) : \left(\frac{9}{2}\pi r_1^2\right) = 12 : 9 = 4 : 3.$$

Řešení úlohy 233

a) Objem polokoule:

$$V_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Objem kuželu:

$$V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

Z rovnosti obou objemů vyplývá, že $v = 2r$.

b) Povrch polokoule:

$$S_P = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

Povrch kuželu:

$$S_K = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \pi r^2 (1 + \sqrt{5})$$

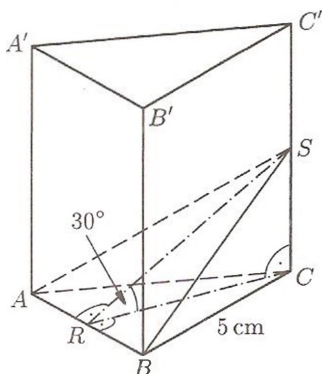
Protože

$$\frac{S_K}{S_P} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3} \doteq 1,079,$$

má kužel přibližně o 7,9 % větší povrch než polokoule.

Řešení úlohy 234

Označme R střed hrany AB , viz obrázek:



Protože rovina RCS je kolmá k rovinám ABC , ABS , je odchylka těchto dvou rovin rovna velikosti úhlu CRS , tedy

$$|\angle CRS| = 30^\circ.$$

Úsečka RC je výškou rovnostranného trojúhelníku ABC , proto

$$|RC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \right) \text{ cm}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku RCS platí $\text{tg } 30^\circ = \frac{|CS|}{|RC|}$, odkud vypočteme

$$|CS| = |RC| \cdot \text{tg } 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}.$$

Tedy

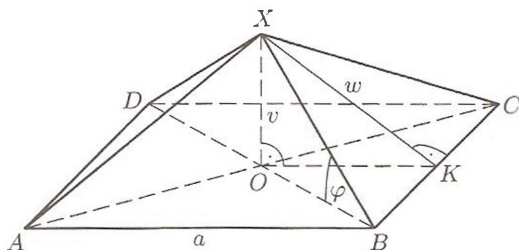
$$|CC'| = 2 \cdot |CS| = (2 \cdot 2,5) \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Obsah pláště hranolu $ABCA'B'C'$ je

$$S_{\text{pl}} = 3 \cdot |BC| \cdot |CC'| = (3 \cdot 5 \cdot 5) \text{ cm}^2 = 75 \text{ cm}^2.$$

Řešení úlohy 235

Pravidelný čtyřboký jehlan, jehož plášť představuje střechu, označme $ABCDX$, střed jeho podstavy označme O a střed hrany BC označme K (viz obrázek).



- a) Obsah S střechy je roven čtyřnásobku obsahu jedné její stěny:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}aw = (2 \cdot 6,4 \cdot 4) \text{ m}^2 = 51,2 \text{ m}^2$$

- b) Objem V půdního prostoru je roven objemu jehlanu $ABCDX$, jehož výšku v vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku OKX :

$$v = \sqrt{w^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{4^2 - 3,2^2} \text{ m} = 2,4 \text{ m}$$

Tedy:

$$V = \frac{1}{3}a^2v = \left(\frac{1}{3} \cdot 6,4^2 \cdot 2,4\right) \text{ m}^3 = 32,768 \text{ m}^3$$

- c) Odchylka φ boční hrany střechy od podlahy půdy je rovna velikosti úhlu OBX . Platí

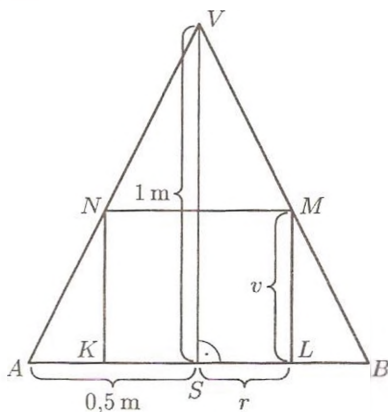
$$|OB| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2} \cdot (|AB| \cdot \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = (3,2 \cdot \sqrt{2}) \text{ m}$$

a hledanou odchylku $\varphi = |\sphericalangle OBX|$ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku OBX :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{|OX|}{|OB|} = \frac{2,4}{3,2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \doteq 0,53 \\ \varphi &\doteq 28^\circ \end{aligned}$$

Řešení úlohy 236

Označme r metrů poloměr podstavy a v metrů výšku rotačního válce vepsaného do daného rotačního kuželu. Řez rovinou obsahující společnou osu obou těles je na obrázku.



Při označení z obrázku jsou trojúhelníky $VS B$ a $ML B$ podobné, a proto:

$$\frac{1}{0,5} = \frac{v}{0,5 - r}$$

$$v = 1 - 2r$$

Označíme-li $Q \text{ m}^2$ obsah pláště uvažovaného rotačního válce, platí:

$$Q = 2\pi r v = 2\pi r(1 - 2r)$$

Z podmínky $Q = \frac{1}{4}\pi$ ze zadání úlohy postupně vypočteme:

$$2\pi r(1 - 2r) = \frac{1}{4}\pi$$

$$16r^2 - 8r + 1 = 0$$

$$(4r - 1)^2 = 0$$

$$r = \frac{1}{4}$$

$$v = 1 - 2r = \frac{1}{2}$$

Válec vepsaný do daného kuželu má poloměr podstavy 0,25 m a výšku 0,5 m.

Řešení úlohy 237

Objem V_1 komolého kuželu s poloměry podstav r_1, r_2 , $r_1 < r_2$, a výškou v je dán vzorcem

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

a objem V_2 hranolu s výškou v a podstavou tvaru čtverce o straně délky s vzorcem

$$V_2 = s^2 v.$$

V našem případě má úhlopříčka čtvercové podstavy hranolu délku rovnou průměru menší z podstav komolého kuželu, tj. $s\sqrt{2} = 2r_1$, takže $s^2 = 2r_1^2$. Proto

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2r_1^2 v}{\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{8^2}{8^2 + 8 \cdot 13 + 13^2} \doteq 0,363.$$

Odpad tvořilo přibližně $(100 - 36,3) \%$, tj. přibližně $63,7 \%$ dřeva.

8 Statistika

Řešení úlohy 247

Počet žáků ve třídě je $3 + 3 + 5 + 5 + 8 + 6 + 5$, tj. 35.

Jeich průměrná výška je alespoň

$$\frac{3 \cdot 145 + 3 \cdot 155 + 5 \cdot 160 + 5 \cdot 165 + 8 \cdot 170 + 6 \cdot 175 + 5 \cdot 180}{35} \text{ cm} \doteq 167 \text{ cm}$$

a nejvýše

$$\frac{3 \cdot 154 + 3 \cdot 159 + 5 \cdot 164 + 5 \cdot 169 + 8 \cdot 174 + 6 \cdot 179 + 5 \cdot 189}{35} \text{ cm} \doteq 172 \text{ cm}.$$

Řešení úlohy 248

Vstupenku za 50 Kč by si koupilo $(218 + 205 + 148 + 76)$ zájemců, zisk by byl

$$(218 + 205 + 148 + 76) \cdot 50 \text{ Kč} = 32\,350 \text{ Kč}.$$

Za vstupenky po 100 Kč by obec utržila

$$(205 + 148 + 76) \cdot 100 \text{ Kč} = 42\,900 \text{ Kč}.$$

Zisk za vstupenky po 150 Kč by byl

$$(148 + 76) \cdot 150 \text{ Kč} = 33\,600 \text{ Kč}.$$

Za vstupenky po 200 Kč by obec utržila

$$76 \cdot 200 \text{ Kč} = 15\,200 \text{ Kč}.$$

Zisk obce bude největší, bude-li vstupenka stát 100 Kč.

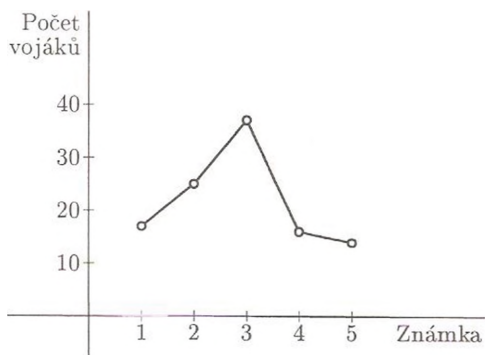
Řešení úlohy 249

- a) Průměrné známky jednotlivých rot i celého praporu jsou uvedeny v tabulce:

	1	2	3	4	5	Počet vojáků	Průměrná známka
1. rota	4	3	13	5	2	27	2,93
2. rota	4	6	10	4	5	29	3,00
3. rota	5	9	3	3	3	23	2,57
4. rota	4	7	11	4	4	30	2,90
prapor	17	25	37	16	14	109	2,86

Průměrná známka v celém praporu byla 2,86.

- b) Nejlepší průměrnou známku měla třetí rota, nejhorší druhá rota.
c) Četnosti jednotlivých známek v celém praporu jsou uvedeny v tabulce v části a). Polygon četností:



- d) Relativní četnosti jednotlivých známek v celém praporu jsou uvedeny v tabulce:

Známka	1	2	3	4	5
Relativní četnost	15,60 %	22,94 %	33,94 %	14,68 %	12,84 %

Řešení úlohy 250

$$a) \quad z_A = \frac{6 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{6 + 11 + 8 + 2 + 3} = \frac{75}{30} = 2,50$$

$$z_B = \frac{4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 0 \cdot 5}{4 + 8 + 7 + 6} = \frac{65}{25} = 2,60$$

$$z = \frac{75 + 65}{30 + 25} = \frac{140}{55} \doteq 2,55$$

b) Protože $z_B > z_A$, chodí Marek do IV.B.

Kdyby dostal známku o n stupňů lepší než ve skutečnosti a jeho třída dopadla lépe než třída sousední, platilo by

$$\frac{65 - n}{25} < 2,5, \quad \text{odkud} \quad n > 2,5.$$

Protože žádný žák ve IV.B nedostal pětku, vyhovuje pouze $n = 3$.

To znamená, že Marek dostal čtyřku; aby jeho třída dopadla lépe než sousední třída, musel by dostat jedničku.

Provázanost Sbírky úloh s Katalogem

V následujícím přehledu jsou uvedeny tematické okruhy, které jsou předmětem ověřování v rámci společné části maturitní zkoušky z matematiky (vyšší úroveň obtížnosti). Kódy, které jsou přiřazeny k jednotlivým úlohám ve sbírce, odpovídají tomuto členění, tzn. i členění, které je uvedeno v katalogu požadavků. Konkrétní specifické cíle, které jsou jednotlivými úlohami naplňovány, lze vyhledat v příslušné kapitole Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky z matematiky.

1. Číselné množiny

- 1.1 Přirozená čísla
- 1.2 Celá čísla
- 1.3 Racionální čísla
- 1.4 Reálná čísla
- 1.5 Komplexní čísla

2. Algebraické výrazy

- 2.1 Mnohočleny
- 2.2 Lomené výrazy
- 2.3 Výrazy s mocninami a odmocninami

3. Rovnice a nerovnice

- 3.1 Lineární rovnice a jejich soustavy
- 3.2 Kvadratické rovnice
- 3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou
- 3.4 Lineární a kvadratické nerovnice a jejich soustavy

4. Funkce

- 4.1 Základní poznatky o funkcích
- 4.2 Lineární funkce
- 4.3 Kvadratické funkce
- 4.4 Mocninné funkce
- 4.5 Lineární lomené funkce
- 4.6 Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice
- 4.7 Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

5. Posloupnosti

- 5.1 Základní poznatky o posloupnostech
- 5.2 Aritmetická posloupnost
- 5.3 Geometrická posloupnost
- 5.4 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe

6. Planimetrie

- 6.1 Planimetrické pojmy a poznatky
- 6.2 Trojúhelníky
- 6.3 Mnohoúhelníky
- 6.4 Kružnice a kruh
- 6.5 Geometrická zobrazení

OBSAH:

1. Číselné množiny	7
2. Algebraické výrazy	12
3. Rovnice a nerovnice	18
4. Funkce	28
5. Posloupnosti	36
6. Planimetrie	40
7. Stereometrie	47
8. Statistika	53
Řešení otevřených úloh	57
Provázanost Sbírky úloh s Katalogem	95